



**Уральский  
федеральный  
университет**

имени первого Президента  
России Б.Н.Ельцина

**Институт радиоэлектроники  
и информационных  
технологий — РТФ**

**А. А. ПАНОВА  
И. А. РОВАЙН  
Е. Э. СТРАШИННИН**

# ИССЛЕДОВАНИЕ И СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ СТЕНДОМ «ШАР НА ПЛАТЕ»

Лабораторный практикум





Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

**А. А. Панова, И. А. Ровайн, Е. Э. Страшинин**

# **ИССЛЕДОВАНИЕ И СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ СТЕНДОМ «ШАР НА ПЛАТЕ»**

*Лабораторный практикум*

Рекомендовано методическим советом  
Уральского федерального университета  
для студентов вуза, обучающихся по направлению  
27.03.04 «Управление в технических системах»

Екатеринбург  
Издательство Уральского университета  
2017

УДК 681.51(075.5)

ББК 3-5-05я73-5

П16

Рецензенты:

доц., канд. техн. наук *А. В. Дружинин* (Уральский государственный горный университет, каф. информатики); науч. сотр., канд. техн. наук *Н. Г. Лавров* (институт математики и механики Уральского отделения РАН, отдел динамических систем)

Научный редактор — проф., канд. техн. наук *Д. В. Астрецов*

**Панова, А. А.**

П16 Исследование и синтез системы управления стендом «Шар на плате» : лабораторный практикум / А. А. Панова, И. А. Ровайн, Е. Э. Страшинин. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. — 107, [1] с.  
ISBN 978-5-7996-2091-2

Лабораторный практикум содержит описание выполнения четырех лабораторных работ: три работы по разделу «Линейные непрерывные системы» дисциплины «Теория автоматического управления»; четвертая работа по разделу «Линейные цифровые системы». Работы выполняются на стенде «Шар на плате», который управляется целевым компьютером реального времени Education от Speedgoat в пакете MATLAB.

УДК 681.51(075.5)

ББК 3-5-05я73-5

ISBN 978-5-7996-2091-2

© Уральский федеральный  
университет, 2017



---

## Предисловие

Лабораторный практикум к лабораторным работам «Исследование и синтез системы управления стендом «Шар на Плате»» по дисциплине «Теория автоматического управления» предназначен для студентов направления 220400 «Управление в технических системах» очной формы обучения.

Изучение раздела «Линейные непрерывные системы» дисциплины «Теория автоматического управления» предусматривает выполнение трех лабораторных работ. Первые две работы («Математическое описание шара на плате и платы без шара. Моделирование платы без шара», «Разработка математической модели электромагнитного привода платы и компенсатора его нелинейности») рассчитаны каждая на четырехчасовое занятие, третья («Синтез системы управления платой») — на два четырехчасовых занятия.

Изучение раздела «Линейные цифровые системы» дисциплины «Теория автоматического управления» предусматривает выполнение одной лабораторной работы («Цифровой синтез системы управления шаром и платой»), рассчитанной на три четырехчасовых занятия. На первом занятии студентам предлагается синтезировать цифровое управление угловым движением платы и отладить его на модели; на втором — синтезировать и проверить на модели управление движением шара; на третьем отладить синтезированное управление на реальном стенде.

Целью работ является иллюстрация применения методов современной теории управления для стенда «Шар на плате».

В ходе лабораторных работ студенты знакомятся со стендом, компьютером реального времени (контроллером), математическим описанием шара на плате. Они знакомятся с пакетом MATLAB со средой Simulink, разрабатывают математическую модель электромагнитного привода платы, производят синтез непрерывной системы управления платой, которую после отладки на модели проверяют на стенде. В четвертой работе они производят синтез цифровой двухчастотной системы управления шаром на плате, которую после отладки на модели проверяют и доводят на стенде.

В разработанных лабораторных работах реализован современный подход к организации практической деятельности студентов. Студенты, выполняя лабораторные работы, проходят следующие основные этапы: создание математической модели объекта, разработка алгоритма управления данным объектом, проверка и отладка алгоритма на модели, реализация алгоритма управления на стенде в режиме реального времени. Таким образом, организовано непосредственное взаимодействие студентов с реальным объектом управления, что является важным при подготовке квалифицированных специалистов в области систем автоматического управления.

---

*Лабораторная работа № 1*  
Математическое описание шара  
на плате и платы без шара.  
Моделирование платы без шара

### **1.1. Цели работы**

Ознакомиться с описанием стенда и контроллера. Получить математическое описание шара на плате. От математического описания шара на плате перейти к математическому описанию платы без шара и линеаризовать последнее. Выполнить моделирование нелинейной и линейной моделей платы в среде Simulink пакета MATLAB, попутно знакомясь с этим пакетом.

### **1.2. Описание стенда и контроллера**

Изображенный на рис. 1.1 стенд Ball and Plate («Шар на плате») производства фирмы Feedback используется на кафедре автоматике для проведения лабораторных работ по дисциплине «Теория автоматического управления». Для управления стендом используется целевой компьютер реального времени Education фирмы Speedgoat (далее по тексту — контроллер), который программируется с помощью Simulink.

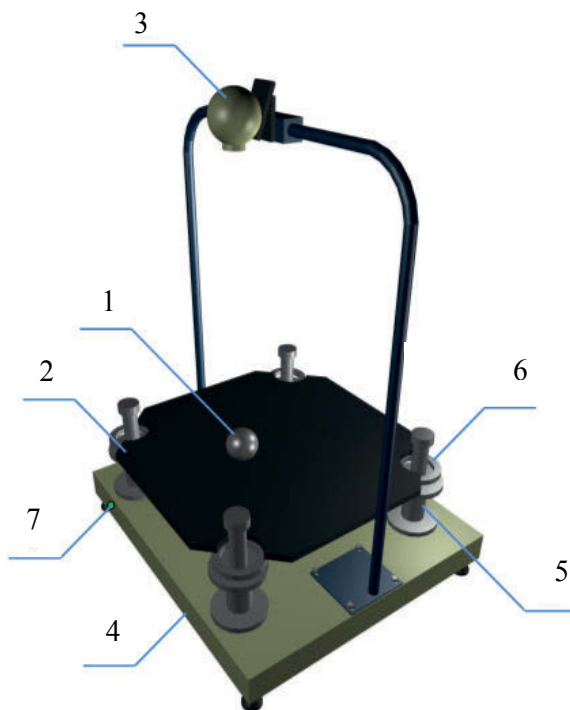


Рис. 1.1. Стенд «Шар на плате»:

1 — шар, 2 — плата, 3 — веб-камера, 4 — основание, 5 — одна из четырех катушек, 6 — одно из четырех колец, 7 — кнопка включения/выключения

Стенд «Шар на плате» предназначен для управления положением шара на плате. Положение шара определяется с помощью веб-камеры. Плата ограничена бортами, которые не позволяют шару покинуть ее поверхность. Плата крепится к основанию стенда посредством карданового подпора, который имеет две угловые степени свободы. На кардановом подпоре вмонтированы два потенциометрических датчика, с помощью которых измеряется угловое положение платы. Изменение положения шара происходит за счет наклона платы. Наклон платы вызывается действием переменного электромагнитного поля катушек на переменное электромагнитное поле соответствующих колец платы, изготовленных из немагнитного электропроводящего материала. Переменное электромагнитное поле колец порождается переменным током, который протекает в кольцо под действием соответствующей наведенной полем катушки электродвижущей силы. Сис-

тому катушек и соответствующих колец, а также связанную с катушками электронику, которая расположена в основании стенда, будем называть электромагнитным приводом платы.

На рис. 1.2 изображен вид на плату с положения веб-камеры, псевдовекторы [1, с. 375] угловой скорости  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\beta}$  (в правой системе координат) при вращении платы в направлении увеличения углов  $\alpha$  и  $\beta$ , а также система координат  $xOy$ , в которой определяется положение шара. Конструкция карданового подпора такова, что при любых углах наклона платы псевдовектор  $\dot{\alpha}$  лежит в плоскости платы, а псевдовектор  $\dot{\beta}$  — в горизонтальной плоскости. Несмотря на это, чтобы избежать излишнего усложнения математического описания шара на плате, будем считать, что псевдовектор  $\dot{\beta}$  тоже лежит в плоскости платы. Диапазон изменения  $\alpha$  и  $\beta$  составляет от  $-6.5^\circ$  до  $+6.5^\circ$ . Диапазон изменения  $x$  и  $y$  составляет от  $-0.2$  до  $+0.2$  м. В табл. 1.1 представлены параметры платы. В табл. 1.2 представлены основные используемые обозначения.

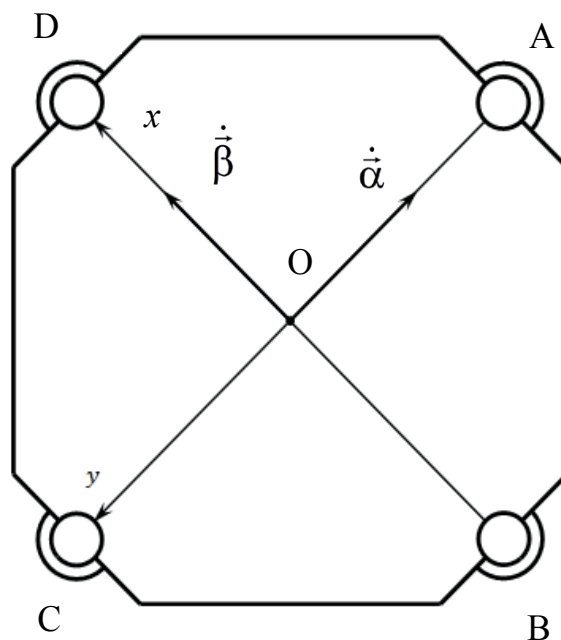


Рис. 1.2. Вид на плату с положения веб-камеры (буквами  $A, B, C, D$  обозначены кольца; кнопка включения/выключения стенда находится возле кольца  $C$ )

Таблица 1.1

Параметры платы

Обозначение	Расшифровка обозначения	Значение	Единица измерения
$J_p$	Момент инерции платы относительно осей $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$	$4.56 \cdot 10^{-3}$	кг·м <sup>2</sup>
$m_p$	Масса платы с кольцами	$3.65 \cdot 10^{-1}$	кг
$h_p$	Высота рамки карданового подпора	$2.2 \cdot 10^{-2}$	м

Таблица 1.2

Основные обозначения

Обозначение	Расшифровка обозначения	Единица измерения
$\alpha$ и $\beta$	Углы наклона платы относительно осей $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$	рад
$u_{p\alpha}$ и $u_{p\beta}$	Напряжения с потенциометрических датчиков углов $\alpha$ и $\beta$	В
$u_{\alpha}^*$ и $u_{\beta}^*$	Входные напряжения привода по углам $\alpha$ и $\beta$	В
$M_{\alpha}$ и $M_{\beta}$	Моменты силы привода относительно осей $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$	Н·м
$x$ и $y$	Координаты шара на плате	м

На рис. 1.3 представлена функциональная схема системы управления стендом, в которой можно выделить три подсистемы: стенд «Шар на плате», контроллер и персональный компью-

тер. На персональном компьютере установлен пакет MATLAB R2014a со средой Simulink. Программа среды Simulink, в которой реализуется алгоритм управления стендом и алгоритм обработки видеоизображения с веб-камеры, загружается на контроллер с помощью Ethernet-соединения. К USB-порту контроллера подключена веб-камера. К модулю ввода/вывода IO102 контроллера подсоединены два аналоговых входа и два аналоговых выхода. На аналоговые входы поступают сигналы с потенциометрических датчиков углового положения платы  $u_{p\alpha}$  и  $u_{p\beta}$ , которые находятся в диапазоне от 0 до 5 В. На электромагнитный привод платы подаются сигналы с аналоговых выходов  $u_{\alpha}^*$  и  $u_{\beta}^*$ , которые находятся в диапазоне от 0 до 5 В. Электроника привода преобразует их в высокочастотные сигналы переменного тока, порождающие переменное электромагнитное поле катушек. Впредь, говоря о катушках, будем обозначать их теми же буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , что и соответствующие кольца на рис. 1.2. Сигналы  $u_{\alpha}^*$  и  $u_{\beta}^*$  в диапазоне от 0 до 2.5 В активизируют соответственно катушки  $B$  и  $A$ , а в диапазоне от 2.5 до 5 В — катушки  $D$  и  $C$ .

В нашем случае контроллер работает с периодом цикла, равным 1 мс. Опрос аналоговых входов происходит в каждом цикле, а опрос веб-камеры — через 40 циклов, так как камера делает 25 кадров в секунду, то есть каждые 40 мс, которые равны 40 периодам цикла. В начале цикла работы контроллер опрашивает аналоговые входы и при необходимости веб-камеру. Далее контроллер выполняет загруженную программу, используя информацию об углах наклона платы и о положении шара на плате, которая была получена при опросе. В результате выполнения программы контроллер формирует сигналы, которые подаются на аналоговые выходы в конце цикла работы. Сигналы на аналоговых выходах будут неизменны до момента окончания следующего цикла.



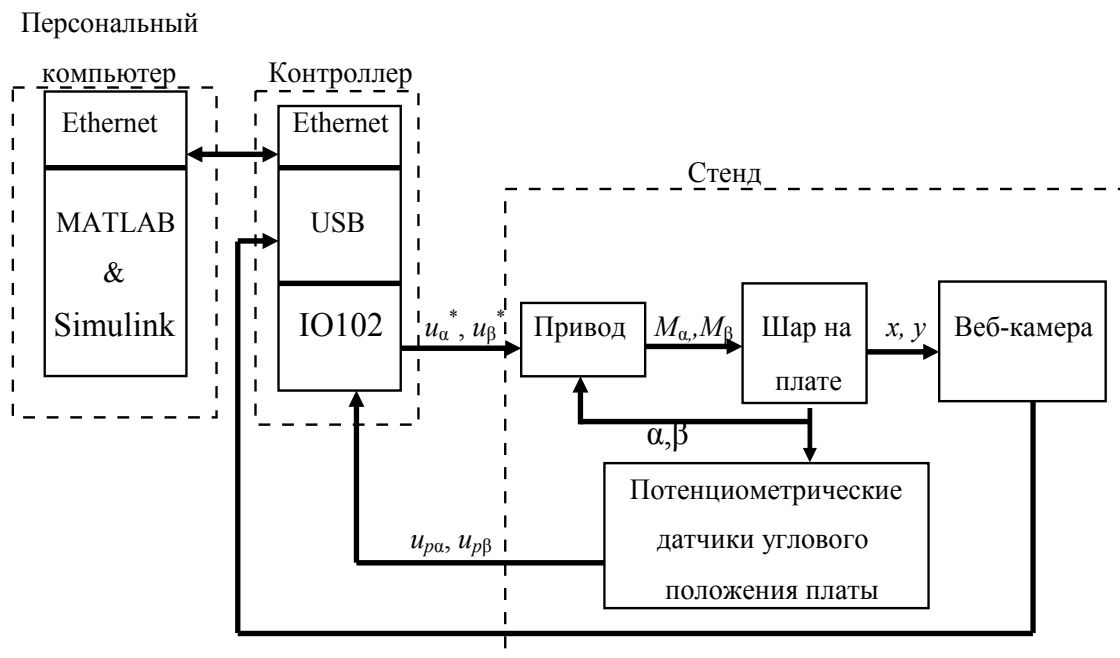


Рис. 1.3. Функциональная схема системы управления стендом «Шар на плате»

### 1.3. Математическое описание шара на плате и платы без шара

Управление положением шара на плате является достаточно сложной задачей. Наличие веб-камеры, функционирующей с периодом 40 мс, вынуждает синтезировать дискретную систему управления шаром на плате. Вопросы, связанные с дискретными системами, будут рассмотрены при изучении данной дисциплины в следующем семестре. В этом семестре ограничимся синтезом непрерывной системы управления угловым положением платы без шара. Дискретные сигналы с потенциометрических датчиков углового положения платы (период дискретизации — 1 мс) могут считаться для данного объекта непрерывными. Для синтеза необходимо иметь математическую модель электромагнитного привода и платы без шара. В этом подразделе будет

получено математическое описание шара на плате (оно будет необходимо в следующем семестре), от которого перейдем к математическому описанию платы без шара.

### 1.3.1. Математическое описание шара на плате

Для математического описания шара на плате применим уравнение Лагранжа второго рода в обобщенных координатах. Обобщенными координатами называются величины, которые определяют положение механической системы в пространстве. Число независимых обобщенных координат, необходимых для задания положения системы, равно числу ее степеней свободы [1]. В качестве независимых обобщенных координат выберем  $x, y, \alpha$  и  $\beta$ . Если пренебрежем действием диссипативных сил, то уравнение Лагранжа второго рода в обобщенных координатах:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{q} = [x \ y \ \alpha \ \beta]^T$  — вектор обобщенных координат,  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T$  — вектор обобщенных скоростей,  $\mathbf{F} = [0 \ 0 \ M_\alpha \ M_\beta]^T$  — вектор обобщенных сил,  $L = T - \Pi$  — функция Лагранжа, то есть разность кинетической и потенциальной энергий системы.

Учитывая выражение для  $L$ , а также то, что под производной скаляра  $\phi$  по вектору  $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$  понимают вектор с компонентами  $\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z$ , перейдем от уравнения (1.1) к системе четырех уравнений

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad (1.2a)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0, \quad (1.2б)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = M_{\alpha}, \quad (1.2в)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \beta} + \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} = M_{\beta}. \quad (1.2г)$$

Перед тем как записать выражение для кинетической энергии системы, рассмотрим рис. 1.4. Линейная скорость поступательного движения шара — это скорость движения центра шара  $V_b = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ . Линейная скорость верхней точки шара  $2V_b$ . Разность линейных скоростей верхней точки и центра, равная  $V_b$ , определяет угловую скорость вращательного движения шара  $\dot{E}_b = V_b / R_b = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} / R_b$ , где  $R_b$  — радиус шара.

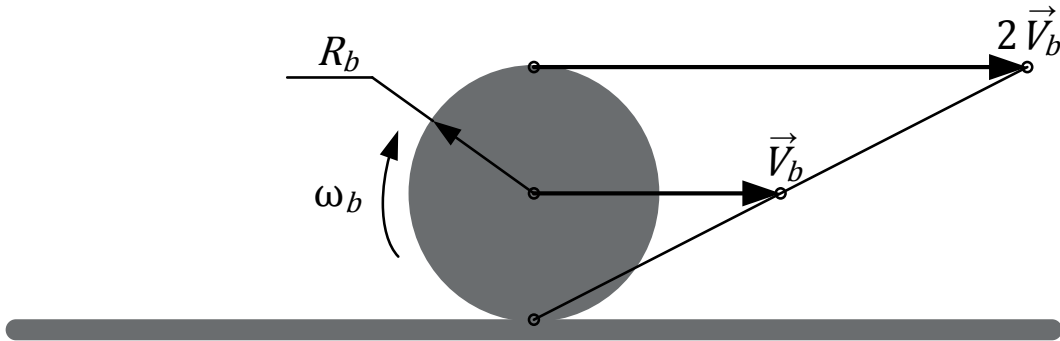


Рис. 1.4. Поступательное и вращательное движение шара по плате ( $|\vec{V}_b| = V_b$ )

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

где

$$T_1 = \frac{m_b V_b^2}{2} = \frac{m_b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2}$$

есть кинетическая энергия поступательного движения шара с линейной скоростью  $V_b$  (масса шара —  $m_b$ );

$$T_2 = \frac{J_b \dot{E}_b^2}{2} = \frac{J_b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2R_b^2}$$

есть кинетическая энергия вращательного движения шара с угловой скоростью  $\omega_b$  (момент инерции шара —  $J_b$ );

$$T_3 = \frac{J_p \left( \sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2} \right)^2}{2} = \frac{J_p (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)}{2}$$

есть кинетическая энергия вращения платы с угловой скоростью  $\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}$  (момент инерции платы —  $J_p$ );

$$T_4 = \frac{J_b^* \left( \sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2} \right)^2}{2} = \frac{J_b^* (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)}{2}$$

есть кинетическая энергия шара от вращения платы с угловой скоростью  $\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}$ , то есть кинетическая энергия переносного движения (момент инерции шара относительно оси вращения платы —  $J_b^*$ ).  $J_b^*$  вычисляется согласно теореме Гюйгенса — Штейнера: момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями, то есть

$$J_b^* = J_b + m_b h^2,$$

где  $h$  равно длине отрезка  $HK$  на рис. 1.5. Вычислим  $h$ , равное расстоянию от оси вращения платы  $OP$  до шара. На рис. 1.5 длина отрезка  $OK$  равна  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi_1 = \angle HOK$ ,  $\varphi_2 = \angle KOX$ ,  $\varphi_3 = \angle XOP$ ,

$$\sin \varphi_1 = \sin [\pi - (\varphi_2 + \varphi_3)] = \sin (\varphi_2 + \varphi_3) = \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\dot{\beta}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\dot{\alpha}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}},$$

$$h = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \varphi_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\dot{\beta}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\dot{\alpha}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}} \right) = \frac{x\dot{\alpha} + y\dot{\beta}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}}.$$

Следовательно, кинетическая энергия переносного движения

$$T_4 = \frac{J_b (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)}{2} + m_b \frac{(x\dot{\alpha} + y\dot{\beta})^2}{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2} \frac{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2}{2} = \frac{J_b (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)}{2} + \frac{m_b (x\dot{\alpha} + y\dot{\beta})^2}{2}$$

и кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \left[ m_b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J_b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{R_b^2} + J_p (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + J_b (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + m_b (x\dot{\alpha} + y\dot{\beta})^2 \right],$$

$$T = \frac{1}{2} \left[ \frac{m_b R_b^2 + J_b}{R_b^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (J_p + J_b) (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + m_b (x\dot{\alpha} + y\dot{\beta})^2 \right]. \quad (1.3)$$

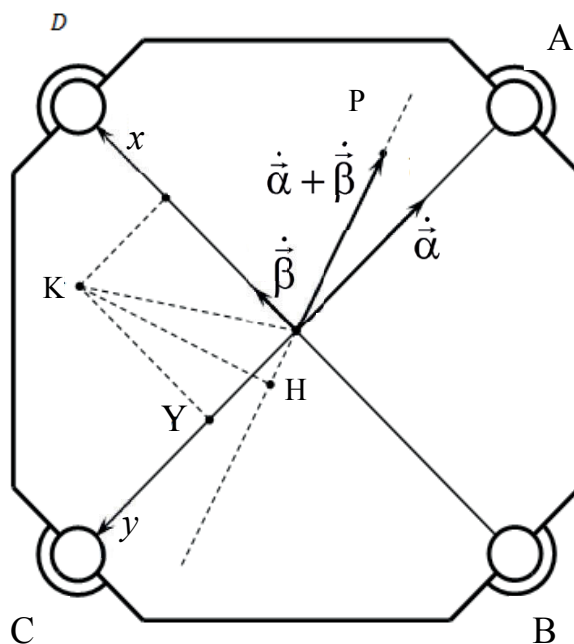


Рис. 1.5. Вид на плату с шаром, находящимся в точке K, с положения веб-камеры

Перед тем как записать выражение для потенциальной энергии системы, получим связь между координатами шара в инерциальной системе координат  $Ox_i y_i z_i$  (рис. 1.6, а) и в связанной с платой системе координат  $Oxyz$ . Если плата горизонтальна, то эти системы координат совпадают. Начало координат  $O$  — это центр масс горизонтальной платы. Считаем, что при наклоне платы на углы  $\alpha$  и  $\beta$  связанная система координат поворачивается, а ее начало неподвижно. Пренебрегая размерами шара и считая, что  $z$  равно 0, а не  $R_b$ , выразим  $z_i$  через  $x$  и  $y$ .

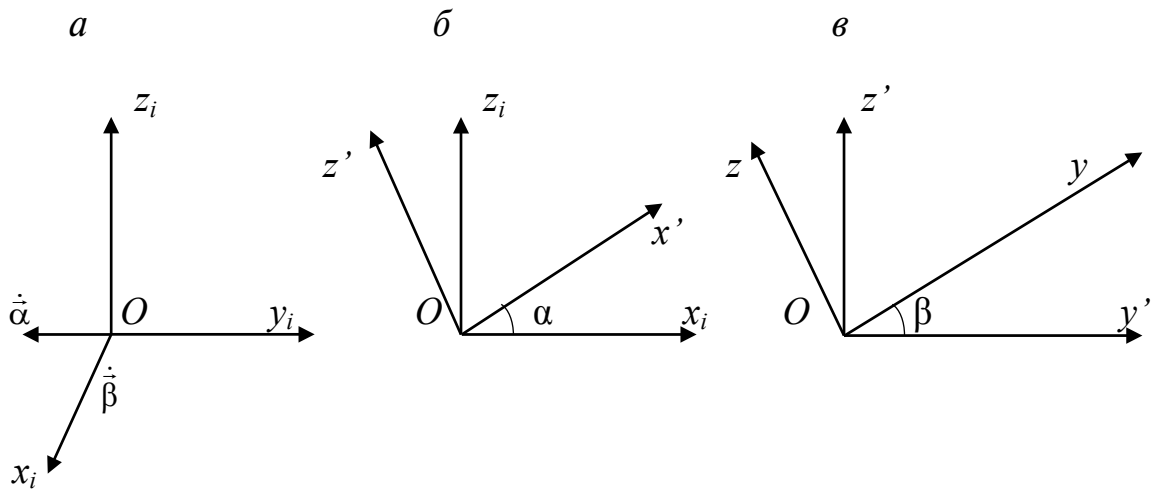


Рис. 1.6. К переходу от инерциальной системы координат к связанной

При повороте платы на угол  $\alpha$  (рис. 1.6, б) и последующем повороте на угол  $\beta$  (рис. 1.6, в) имеют место соотношения

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix},$$

то есть

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ -\sin \alpha \sin \beta & \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ -\sin \alpha \sin \beta & \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \alpha & \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

и  $z_i = x \sin \alpha + y \cos \alpha \sin \beta$  при  $z = 0$ . Если аналогичным образом сначала поворачивать плату на угол  $\beta$ , а потом на угол  $\alpha$ , то получим

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha \sin \beta & \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

и  $z_i = x \sin \alpha \cos \beta + y \sin \beta$  при  $z = 0$ . Таким образом, значение  $z_i$  зависит от последовательности поворотов. Учитывая это, а также малость углов  $\alpha$  и  $\beta$ , то есть близость их косинусов к единице, и не преследуя цель излишнего усложнения математического описания, будем считать, что  $z_i = x \sin \alpha + y \sin \beta$ .

Пусть теперь начало инерциальной и связанной систем координат помещено в точку пересечения осей вращения карданового подпора. Расстояние от этой точки до центра масс платы равно высоте рамки карданового подпора  $h_p$ . С учетом полученных выше



соотношений между координатами в связанной и инерциальной системах координат (при любой последовательности поворотов), а также того, что  $(0, 0, h_p)$  — точка центра масс платы в связанной системе координат, можно утверждать, что  $(0, 0, h_p \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta)$  — точка центра масс платы в инерциальной системе координат.

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2,$$

где

$$\Pi_1 = \Pi_{10} + m_b g z_i = \Pi_{10} + m_b g x \sin \alpha + m_b g y \sin \beta$$

есть потенциальная энергия шара ( $\Pi_{10} = \text{const}$  — потенциальная энергия шара при  $\alpha = \beta = 0$ ,  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения);

$$\Pi_2 = \Pi_{20} + m_p g h_p \cos \alpha \cos \beta = \Pi_{20} + K_k \cos \alpha \cos \beta$$

есть потенциальная энергия платы ( $\Pi_{20} = \text{const}$  — потенциальная энергия платы в предположении, что  $\alpha = \pi/2$  или  $\beta = \pi/2$ ,  $K_k = m_p g h_p = 3.65 \cdot 10^{-1} \cdot 9.81 \cdot 2.2 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} = 7.88 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$  — карданов коэффициент). Следовательно,

$$\Pi = \Pi_{10} + m_b g x \sin \alpha + m_b g y \sin \beta + \Pi_{20} + K_k \cos \alpha \cos \beta. \quad (1.4)$$

Подставляя выражения (1.3) и (1.4) в уравнения (1.2а)–(1.2г) и производя необходимые преобразования, получим дифференциальные уравнения второго порядка

$$\frac{m_b R_b^2 + J_b}{R_b^2} \ddot{x} - m_b (x \ddot{\alpha} + y \ddot{\beta}) \dot{\alpha} + m_b g \sin \alpha = 0, \quad (1.5a)$$

$$\frac{m_b R_b^2 + J_b}{R_b^2} \ddot{y} - m_b (x \ddot{\alpha} + y \ddot{\beta}) \dot{\beta} + m_b g \sin \beta = 0, \quad (1.5б)$$

$$(J_p + J_b) \ddot{\alpha} + m_b (2x \dot{x} \dot{\alpha} + x^2 \ddot{\alpha} + x \dot{y} \dot{\beta} + x y \ddot{\beta} + y \dot{x} \dot{\beta}) + m_b g x \cos \alpha - K_k \sin \alpha \cos \beta = M_\alpha, \quad (1.5в)$$

$$\begin{aligned} & (J_p + J_b)\ddot{\beta} + m_b(y\dot{x}\ddot{\alpha} + x\dot{y}\ddot{\alpha} + 2y\dot{y}\dot{\beta} + y^2\ddot{\beta} + x\dot{y}\ddot{\alpha}) + \\ & + m_b g y \cos \beta - K_k \cos \alpha \sin \beta = M_\beta, \end{aligned} \quad (1.5 \text{ г})$$

которые описывают нелинейную математическую модель шара на плате.

### 1.3.2. Математическое описание платы без шара и его линеаризация

Если в уравнениях (1.5а)–(1.5г) положим, что  $m_b = 0$  и  $J_b = 0$ , и выразим вторые производные от углов наклона платы, то получим два уравнения

$$\ddot{\alpha} = \frac{K_k}{J_p} \sin \alpha \cos \beta + \frac{1}{J_p} M_\alpha, \quad (1.6а)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{K_k}{J_p} \cos \alpha \sin \beta + \frac{1}{J_p} M_\beta, \quad (1.6б)$$

которые описывают нелинейную математическую модель платы без шара.

В разделе «Линейные непрерывные системы» объекты управления описываются линейными дифференциальными уравнениями. Следовательно, уравнения (1.6а) и (1.6б) нужно линеаризовать. Процедура линеаризации состоит в замене функций  $K_k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta / J_p$  и  $K_k \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta / J_p$  на линейные относительно аргументов этих функций члены разложения в ряд Тейлора (в окрестности рабочей точки, которой соответствуют нулевые значения  $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, M_\alpha, M_\beta$ ).  $K_k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta / J_p$  заменим на  $K_k \cdot \alpha / J_p$ , а и  $K_k \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta / J_p$  заменим на  $K_k \cdot \beta / J_p$ , тогда линеаризованные уравнения платы:

$$\ddot{\alpha} = \frac{K_k}{J_p} \alpha + \frac{1}{J_p} M_\alpha, \quad (1.7а)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{K_k}{J_p} \beta + \frac{1}{J_p} M_\beta, \quad (1.76)$$

где  $K_k = 7.88 \cdot 10^{-2}$  Н·м/рад. Из уравнений (1.7а) и (1.7б) видно, что угол  $\beta$  и момент  $M_\beta$  не оказывают влияния на угол  $\alpha$ , а угол  $\alpha$  и момент  $M_\alpha$  не оказывают влияния на угол  $\beta$ . С учетом этого ограничимся использованием только уравнения (1.7а) для описания линейной математической модели платы без шара. Эта модель будет использована при синтезе системы управления платой.

## 1.4. Выполнение работы

1. Ознакомьтесь с описанием стенда и контроллера (параграф 1.2).

2. Ознакомьтесь с математическим описанием шара на плате (пункт 1.3.1). Проверьте правильность уравнений (1.5а)–(1.5г). Для этого, используя соотношения (1.3) и (1.4), найдите все производные, входящие в уравнения (1.2а)–(1.2г), а полученные выражения для производных подставьте в эти уравнения.

3. Ознакомьтесь с математическим описанием платы без шара и его линеаризацией (пункт 1.3.2).

4. Создайте ярлык, с помощью которого будете запускать MATLAB, и рабочую папку, в которой будут храниться ваши файлы. Для этого на рабочем столе создайте копию ярлыка MATLAB R2014a. Переименуйте ее в В&Р [№ группы] [№ бригады] (например, В&Р 300101 I). Создайте рабочую папку с таким же идентификатором (В&Р [№ группы] [№ бригады]). В свойствах вашего ярлыка, на вкладке «Ярлык», в поле «Рабочая папка» введите путь до рабочей папки. После чего запустите MATLAB с помощью вашего ярлыка. Если все было проделано

но правильно, то после запуска текущая папка (Current Folder) будет вашей рабочей папкой. Создайте новую папку, назвав ее ЛРН<sup>№</sup> 1 и сделав текущей. Для этого щелкните в Current Folder правой кнопкой мыши, выберите New Folder и присвойте имя ЛРН<sup>№</sup> 1. После чего зайдите в папку ЛРН<sup>№</sup> 1, тем самым сделав ее текущей.

5. Используя Simulink, соберите схему нелинейной модели платы согласно уравнениям (1.6а) и (1.6б). В командном окне (Command Window) введите simulink. После некоторой задержки откроется Simulink Library Browser, в котором выполните File > New > Model. Откроется новая Simulink-модель, для сохранения которой в вашей рабочей папке под именем ModelPlate используйте File > Save. На левой панели Simulink Library Browser выберите библиотеку Continuous. Справа отобразятся блоки этой библиотеки, из которых нужен блок Integrator. Добавьте в Simulink-модель четыре блока Integrator.

Из библиотеки Math Operations добавьте в Simulink-модель четыре блока Gain, два блока Product, два блока Sum и четыре блока Trigonometric Function. Из библиотеки Ports & Subsystems добавьте в Simulink-модель два блока In1 и два блока Out1. Размер и имя блоков можно изменять. Двойной щелчок по блоку откроет окно его параметров. Если в этом окне нажать кнопку Help, то откроется раздел справки по блоку.

У двух блоков Gain параметр Gain установите  $1/Jp$ , а у двух других —  $Kk$ . У двух блоков Trigonometric Function параметр Function измените на cos. Соедините и переименуйте блоки в соответствии с рис. 1.7. Для создания из схемы подсистемы выделите все и нажмите Ctrl+G. Появятся как блок Subsystem, которому присвойте имя «Нелинейная модель платы», так и блоки  $Ma$ ,  $Mb$ ,  $a$ ,  $b$ , которые следует удалить. Двойной щелчок по подсистеме откроет схему (рис. 1.7), на соединительных линиях которой сделайте подписи.

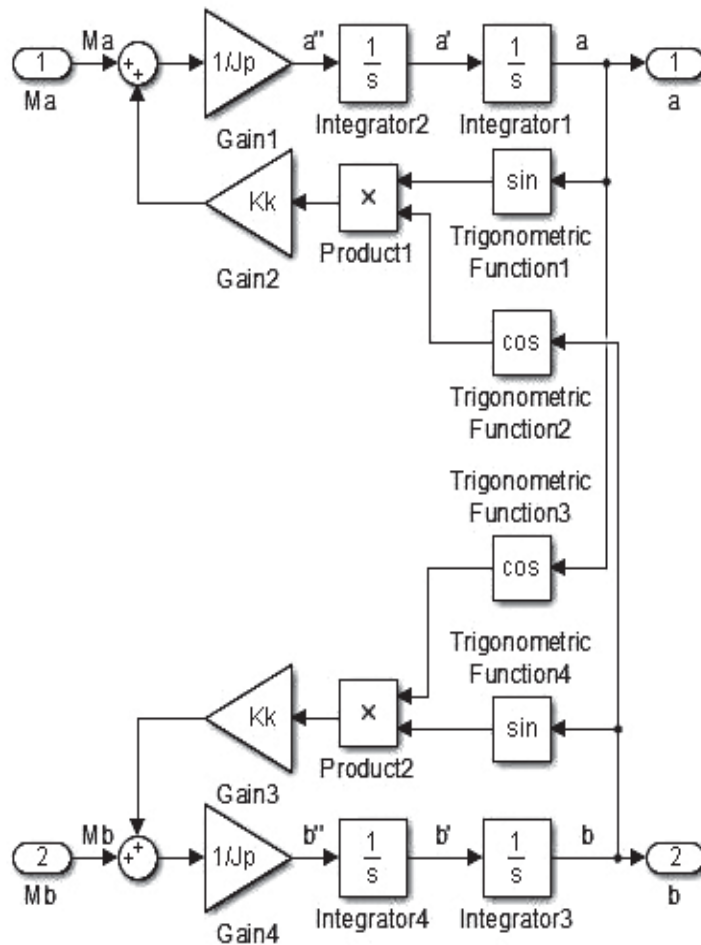



Рис. 1.7. Схема нелинейной модели платы

(обозначения  $a, a', a'', Ma, b, b', b'', Mb$  соответствуют сигналам  $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, M_\alpha, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}, M_\beta$ )

Параметры Simulink-модели  $Jp$  и  $Kk$  еще до запуска моделирования должны быть переменными рабочей области (Workspace). Для этого в Command Window введите:  $Jp = 4.56e-3$ ,  $Kk = 7.88e-2$ ; и нажмите Enter. В Command Window отобразится результат присвоения значения переменной  $Jp$ , и обе переменные появятся в Workspace. Точка с запятой при объявлении  $Kk$  подавила вывод в Command Window результата присвоения. Но рекомен-



дую вам для задания параметров использовать файл-сценарий (Script), прикрепляемый к Simulink-модели и выполняемый перед ее запуском. Создайте этот файл, введя edit в Command Window, а в открывшемся редакторе напишите (после символа % записаны комментарии):

```
clear % очистка Workspace
clc % очистка Command Window
Jp = 4.56e-3; % момент инерции платы, кг*м^2
Kk = 7.88e-2; % карданов коэффициент, Н*м (для
нелинейной модели)
% Н*м/рад (для линейной модели)
```

Нажмите на кнопку  и в открывшемся окне сохраните файл под именем ScriptPlate. После чего файл запустится на выполнение. При наличии в нем синтаксических ошибок в Command Window появится сообщение, которое поможет исправить их. Прикрепите файл ScriptPlate к Simulink-модели, вписав его имя в поле File > Model Properties > Model Properties > Callbacks > InitFcn. Впредь имейте в виду, что файл-сценарий, прикрепленный к Simulink-модели, при запуске моделирования должен находиться в текущей папке MATLAB.

6. Для анализа устойчивости проведите моделирование при  $M_\alpha(t)=0$ ,  $\alpha(0)=4^\circ$ ,  $\dot{\alpha}(0)=0$ ,  $M_\beta(t)=0$ ,  $\beta(0)=2^\circ$ ,  $\dot{\beta}(0)=0$ . Подсоедините на входы созданной подсистемы блок Ground библиотеки Sources, а на выходы включенные последовательно блоки Gain и Scope (последний из библиотеки Sinks). Блок Gain переводит значения  $\alpha$  из радианов в градусы (параметр Gain  $180/\pi$ ). В окне блока Scope ось абсцисс соответствует оси времени, а ось ординат — оси значений входной величины блока. Для задания начальных условий по углам  $\alpha$  и  $\beta$  в радианах параметр Initial condition блоков Integrator1 и Integrator3 (рис. 1.7) замените на  $4*\pi/180$  и  $2*\pi/180$ .

Запустите моделирование длительностью 0.5с (для изменения времени моделирования откройте Simulation > Model

Configuration Parameters > Solver и измените параметр Stop time на 0.5), нажав на кнопку . Сделайте вывод относительно устойчивости нелинейной модели платы по результатам моделирования, представленным в окнах блоков Scope (нажмите на кнопку  для отображения всего диапазона значений по обеим осям; если необходимо изменить диапазон отображаемых значений оси ординат, то нажмите правую кнопку мыши в области построения окна Scope и выберите Axes properties).

7. От линейного дифференциального уравнения (1.7а) перейдите к описанию в виде передаточной функции

$$W_{p\alpha}(s) = \frac{A(s)}{M_{\alpha}(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = k \frac{(s - z)}{(s - p_1)(s - p_2)},$$

где функции  $A(s)$  и  $M_{\alpha}(s)$  комплексной переменной  $s$  являются изображениями по Лапласу [2, с. 595] функций времени  $\alpha(t)$  и  $M_{\alpha}(t)$ . Команда  $W_{p\alpha} = tf([b1 \ b0], [a2 \ a1 \ a0])$  создает в MATLAB передаточную функцию платы. Если вам нужна справка по функции  $tf$ , то введите `doc tf` в Command Window. Команда  $[z, p, k] = zpdata(W_{p\alpha}, 'v')$  возвращает нули  $z$ , полюсы  $p$ , а также коэффициент  $k$  ( $k = -p_1 p_2 W_{p\alpha}(0) / z$ ) передаточной функции платы. Запишите в файле ScriptPlate команды, которые создают передаточную функцию платы, а также вычисляют ее нули и полюсы. Добавьте в Simulink-модель блок Transfer Fcn библиотеки Continuous и измените его параметры Numerator coefficients и Denominator coefficients так, чтобы получить передаточную функцию платы. По результатам этого этапа сделайте вывод относительно устойчивости линейной модели платы.

8. От линейного дифференциального уравнения (1.7а) перейдите к описанию в пространстве состояний

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_p M_{\alpha}(t),$$




$$\alpha(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{D}_p M_\alpha(t),$$

где  $\mathbf{x}_p(t) = [\alpha(t) \quad \dot{\alpha}(t)]^T$  — вектор состояния,  $\mathbf{A}_p$  — матрица динамики,  $\mathbf{B}_p$  — матрица управления,  $\mathbf{C}_p$  — матрица выхода,  $\mathbf{D}_p$  — матрица обхода (в нашем случае скаляр). Матрица динамики

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

создается в MATLAB командой  $A_p = [a_{11} \ a_{12}; a_{21} \ a_{22}]$ . Команда `eig(Ap)` вычисляет собственные значения этой матрицы. Команда `plate = ss(Ap, Bp, Cp, Dp)` создает модель платы в пространстве состояний. Запишите в файле ScriptPlate команды, которые создают матрицы, описывающие плату в пространстве состояний, вычисляют собственные значения матрицы динамики и создают модель платы в пространстве состояний. В Simulink-модели создайте копию подсистемы «Нелинейная модель платы». Внесите изменения в эту подсистему, чтобы она представляла линейную модель платы в пространстве состояний. Присвойте копии подсистемы имя «Линейная модель платы». По результатам этого этапа сделайте вывод относительно устойчивости линейной модели платы.

9. В Simulink сравните выходы моделей. Для этого добавьте в Simulink-модель блок Sine Wave библиотеки Sources, блок Terminator библиотеки Sinks и блок Mux библиотеки Signal Routing, изменив количество входов на 3. Измените Simulink-модель согласно рис. 1.8. Не забудьте задать нулевые начальные условия по углу  $\alpha$ . Подберите такую амплитуду синусоиды, при которой к окончанию моделирования  $\alpha \approx 6.5^\circ$ . С помощью блока Scope сохраните в Workspace результаты моделирования (нажмите на кнопку , в открывшемся окне на вкладке History поставьте галочку напротив Save data to workspace, па-

параметр Variable name должен быть ScopeData, параметр Format установите Array; также заметим, что впредь не будет лишним убирать галочку напротив Limit data points to last). По результатам моделирования сделайте вывод о соотношении между выходными сигналами. В этом вам может помочь массив рабочей области ScopeData (первый столбец — время, второй столбец — выход нелинейной модели, третий столбец — выход модели в виде передаточной функции, четвертый столбец — выход модели в пространстве состояний).

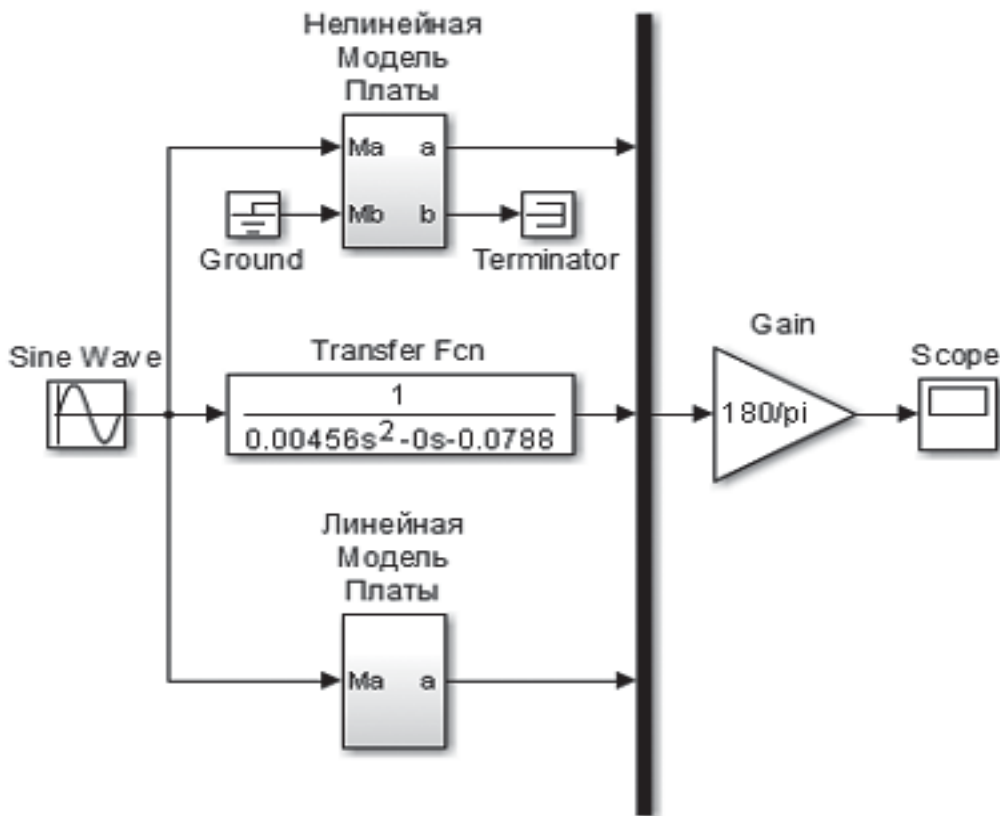


Рис. 1.8. Сравнение моделей

10. В качестве домашнего задания, используя массив рабочей области ScopeData, постройте три графика зависимости угла  $\alpha$  от времени  $t$ . Создайте файл-сценарий, назвав его ScriptPlot. Команда figure создает графическое окно. Команда subplot со-

здает координатные оси (в одном графическом окне создайте для каждого графика свои координатные оси). Команда `plot` строит график. Команда `axis` изменяет координатные оси. Команды `xlabel`, `ylabel` и `title` создают подписи оси абсцисс, оси ординат и графика в целом. Команда `grid` наносит сетку. Для каждой команды существует раздел справки. Файл-сценарий `ScriptPlot` прикрепите к Simulink-модели, вписав его имя в поле `File > Model Properties > Model Properties > Callbacks > StopFcn` (файл выполняется после моделирования).

## 1.5. Требования к содержанию отчета

1. Представить цели работы.
2. Написать краткий пересказ параграфа 1.2.
3. Подробно расписать переход от уравнений (1.2a)–(1.2г) к уравнениям (1.5a)–(1.5г) согласно этапу 2 подраздела 1.4.
4. Сделать вывод относительно устойчивости нелинейной модели платы.
5. Расписать переход от уравнения (1.7a) к описанию в виде передаточной функции. Сделать вывод относительно устойчивости линейной модели платы из анализа передаточной функции.
6. Расписать переход от уравнения (1.7a) к описанию в пространстве состояний. Представить рисунок схемы подсистемы «Линейная модель платы» (выберите `Edit > Copy Current View to Clipboard > Metafile` (или `Bitmap`) для помещения содержимого окна Simulink-модели в буфер обмена). Сделать вывод относительно устойчивости линейной модели платы из анализа модели в пространстве состояний.
7. Сделать вывод о соотношении между выходными сигналами нелинейной модели, линейной модели в виде передаточной функции и линейной модели в пространстве состояний. Пред-

ставить графики, построенные в результате выполнения файла ScriptPlot (в окне с построенными графиками выберите Edit > Copy Figure для их помещения в буфер обмена).

8. Представить текст файлов ScriptPlate и ScriptPlot.

9. Отчет оформляется на листах формата А4. Допускается рукописное, печатное или комбинированное оформление.

## 1.6. Контрольные вопросы

1. В сторону какого кольца ( $A, B, C, D$ ) направлен псевдовектор  $\dot{\alpha}$  и псевдовектор  $\dot{\beta}$  в следующих случаях: а)  $\dot{\alpha} = 1$  град/с,  $\dot{\beta} = 2$  град/с; б)  $\dot{\alpha} = -3$  град/с,  $\dot{\beta} = 3$  град/с; в)  $\dot{\alpha} = 0$  град/с,  $\dot{\beta} = -1$  град/с?

2. Почему в этом семестре вы ограничитесь синтезом непрерывной системы управления угловым положением платы без шара?

3. Что понимают под производной скаляра  $\phi$  по вектору  $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ ?

4. Нужно ли знать численное значение параметров  $\Pi_{10}$  и  $\Pi_{20}$  в соотношении (1.4)? Почему?

5. Какая связь существует между рядами Маклорена и рядами Тейлора?

---

## *Лабораторная работа № 2*

### Разработка математической модели электромагнитного привода платы и компенсатора его нелинейности

#### **2.1. Цели работы**

Создать Simulink-модель для регистрации напряжения, создаваемого приводом. Загрузить ее на контроллер и запустить для выполнения в режиме реального времени. Провести эксперименты по регистрации значений напряжения, создающего заданные величины момента привода. По результатам экспериментов разработать математическую модель электромагнитного привода. Используя эту модель, разработать компенсатор нелинейности привода. Реализовать модель привода и компенсатор его нелинейности в среде Simulink. Проверить работоспособность компенсатора.

#### **2.2. Математическая модель электромагнитного привода платы**

Моменты  $M_\alpha$  и  $M_\beta$ , воздействующие на плату со стороны привода, зависят от напряжений  $u_\alpha^*$  и  $u_\beta^*$  на входе привода, а также от расстояний между катушками и соответствующими кольца-

ми, то есть от углов  $\alpha$  и  $\beta$ , что отображено на рис. 1.3 из работы № 1. Примем, что привод является безынерционным (время переходных процессов в нем является крайне малой величиной). При этом модель привода можно описать двумя алгебраическими уравнениями  $M_\alpha = f_\alpha(u_\alpha, \alpha)$  и  $M_\beta = f_\beta(u_\beta, \beta)$ , где  $u_\alpha = u_\alpha^* - 2.5$  и  $u_\beta = u_\beta^* - 2.5$  — напряжения в диапазоне от  $-2.5$  до  $+2.5$  В, причем  $f_\alpha(0, \alpha) = 0$  и  $f_\beta(0, \beta) = 0$ , так как если  $u_\alpha = 0$ , то  $M_\alpha = 0$ , если  $u_\beta = 0$ , то  $M_\beta = 0$ . Примем, что функционирование пары катушек  $B$  и  $D$  не отличается от функционирования пары катушек  $A$  и  $C$ , а функции  $f_\alpha$  и  $f_\beta$  тождественно равны. Функциональная зависимость  $M_\alpha = f_\alpha(u_\alpha, \alpha)$  будет установлена в результате обработки данных экспериментов по регистрации значения напряжения  $u_\alpha$ .

### 2.2.1. Описание эксперимента по регистрации напряжения

Регистрируется напряжение  $u_\alpha$ , при котором привод воздействует на плату так, что суммарный момент  $M_{\Sigma\alpha}$  (рис. 2.1), действующий на плату, становится нулевым, а плата — неподвижной. Регистрация напряжения  $u_\alpha$  проводится при углах  $\alpha$ , равных  $0^\circ$ ,  $\pm 1.5^\circ$ ,  $\pm 3.25^\circ$ ,  $\pm 5.5^\circ$ , в то время как угол  $\beta = 0^\circ$ , и различных грузах, центр масс которых расположен на плате в точках  $B_1$  или  $D_1$  (рис. 2.2) (длина отрезков  $OB_1$  и  $OD_1$   $l = 0.15$  м). Грузы не обладают ни магнитными, ни токопроводящими свойствами. Если пренебречь зависимостью от угла, так как при угле  $\alpha = \pm 5.5^\circ$  значение  $\cos\alpha \approx 1$ , то груз массой  $m_w$  создает момент силы тяжести

$$M_w = \begin{cases} +m_w g l & \text{при грузе в точке } B_1, \\ -m_w g l & \text{при грузе в точке } D_1. \end{cases}$$

Для поддержания постоянного значения угла  $\alpha$  используется астатический регулятор с подобранными коэффициентами (рис. 2.3). Такой же регулятор используется и для поддержания нулевого значения угла  $\beta$ . Эти регуляторы обеспечивают в установившемся режиме нулевые ошибки регулирования  $e_\alpha = \alpha_{sp} - \alpha$  и  $e_\beta = 0 - \beta$ , где  $\alpha_{sp} = \text{const}$  — уставка ( $SP$  сокращение от Set Point) по углу  $\alpha$ .

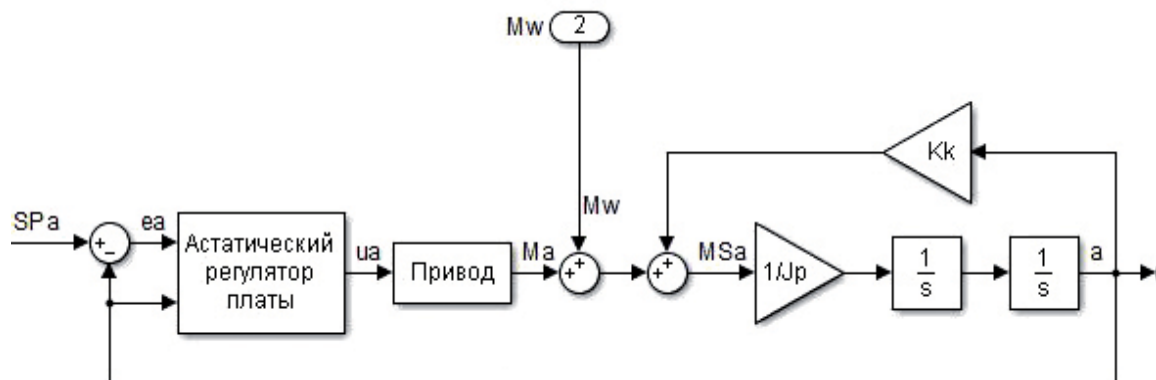


Рис. 2.1. Система регулирования  $\alpha$  при эксперименте по регистрации  $u_\alpha$  (обозначения  $SPa$ ,  $Mw$  и  $MSa$  соответствуют сигналам  $\alpha_{SP}$ ,  $M_w$  и  $M_{\Sigma\alpha}$ )

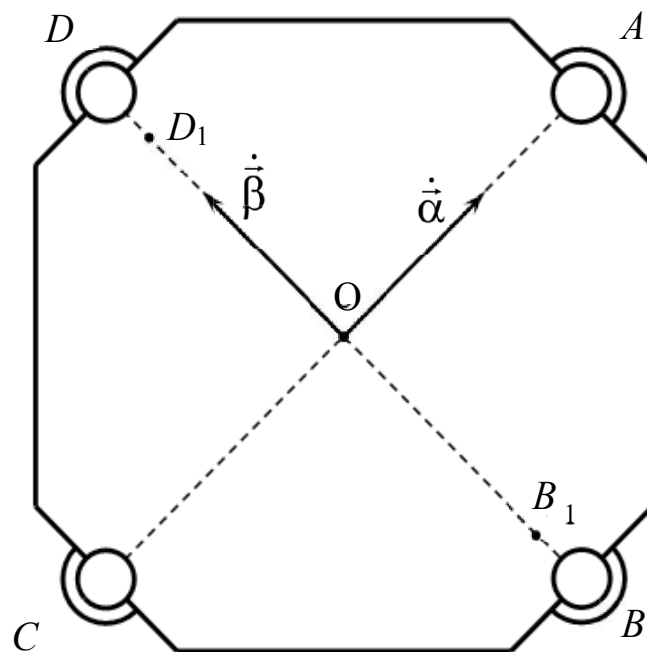


Рис. 2.2. Вид на плату с положения веб-камеры (кнопка включения/выключения стенда находится возле кольца C)

Может возникнуть вопрос, зачем проводить синтез системы управления платой с использованием моделей привода и пла-



ты, если коэффициенты регулятора можно экспериментально подобрать на стенде без использования моделей? На это есть несколько причин. Во-первых, при изучении вами дисциплины «Теория автоматического управления» рассматриваются модельно-ориентированные методы синтеза, а не метод подбора. Во-вторых, в большинстве случаев подобранные значения коэффициентов обеспечивают далеко не лучшее качество регулирования. В-третьих, метод подбора пригоден не для всех систем.

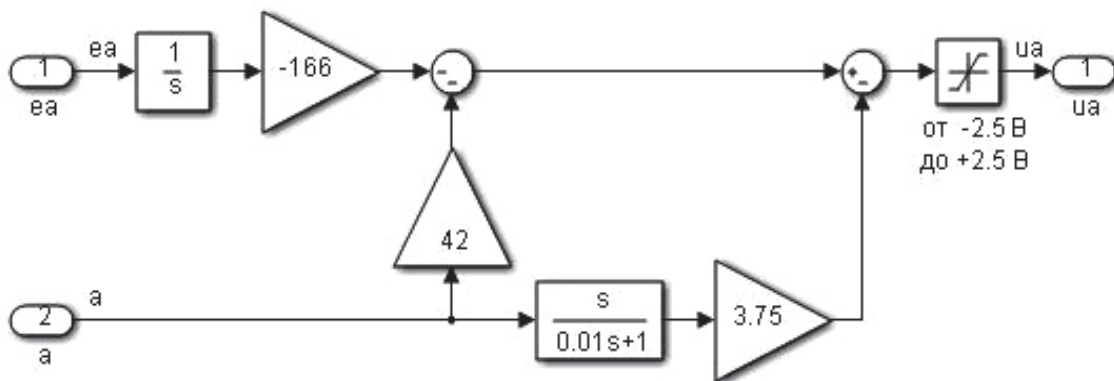


Рис. 2.3. Схема астатического регулятора платы по углу  $\alpha$

(обозначения  $e_\alpha$  и  $u_\alpha$  соответствуют сигналам  $e_\alpha$  и  $u_\alpha$ )

Из рис. 2.1 видно, что при неподвижной плате и угле  $\alpha = \alpha_{sp}$  на регулятор (рис. 2.3) поступает нулевая ошибка  $e_\alpha$  и постоянное значение угла  $\alpha$ . Следовательно, регулятор выдает постоянное значение управляющего напряжения  $u_\alpha$ , а согласно рис. 2.1 воздействующий на плату суммарный момент  $M_{\Sigma\alpha} = M_\alpha + M_w + K_k \alpha = 0$ . Тогда при данном грузе массой  $m_w$  и данном угле  $\alpha$  момент привода

$$M_\alpha = -M_w - K_k \alpha. \quad (2.1)$$

Разрабатывая модель привода, авторы этих строк провели 86 экспериментов, в результате которых было зарегистрировано 86 значений напряжения. Вам будут предоставлены 79 значений

этих напряжений, а недостающие семь значений будут получены вами экспериментально. Заметим, что каждому значению напряжения  $u_{\alpha n}$ , зарегистрированному в результате эксперимента под номером  $n$  ( $n$  принимает значения от 1 до 86), соответствует значение угла  $\alpha_n$  и значение момента  $M_{\alpha n}$ , которое рассчитывается согласно (2.1).

### 2.2.2. Уравнение, описывающее математическую модель привода

Пусть уравнение поверхности

$$M_{\alpha} = p_{10}u_{\alpha} + p_{20}u_{\alpha}^2 + p_{11}u_{\alpha}\alpha + p_{30}u_{\alpha}^3 + p_{21}u_{\alpha}^2\alpha + p_{12}u_{\alpha}\alpha^2 \quad (2.2)$$

описывает математическую модель привода. Выбор в качестве функции  $f_{\alpha}(u_{\alpha}, \alpha)$  полинома третьего порядка обусловлен главным образом тем, что это позволит без особых трудностей реализовать компенсатор нелинейности привода (смотрите параграф 2.3). Для установления численных значений коэффициентов полинома  $p_{10}$ ,  $p_{20}$ ,  $p_{11}$ ,  $p_{30}$ ,  $p_{21}$  и  $p_{12}$  будет использован линейный метод наименьших квадратов. Суть метода состоит в нахождении таких коэффициентов, при которых поверхность  $M_{\alpha} = f_{\alpha}(u_{\alpha}, \alpha)$  близка к точкам  $(u_{\alpha n}, \alpha_n, M_{\alpha n})$  по критерию минимума суммы квадратов ошибок. Сумма квадратов ошибок (английская аббревиатура *SSE*)

$$f_{SSE}(p_{10}, p_{20}, p_{11}, p_{30}, p_{21}, p_{12}) = \sum_{n=1}^{86} [M_{\alpha n} - f_{\alpha}(u_{\alpha n}, \alpha_n)]^2.$$

Перепишем уравнение (2.2)

$$M_{\alpha} = p_1(\alpha)u_{\alpha} + p_2(\alpha)u_{\alpha}^2 + p_3u_{\alpha}^3, \quad (2.3)$$

где  $p_1(\alpha) = p_{10} + p_{11}\alpha + p_{12}\alpha^2$ ,  $p_2(\alpha) = p_{20} + p_{21}\alpha$  и  $p_3 = p_{30}$ .

## 2.3. Компенсатор нелинейности привода

Использование компенсатора нелинейности привода в соответствии с рис. 2.4 при условии, что напряжение  $u_\alpha$  находится в диапазоне от  $-2.5$  до  $+2.5$  В, позволит сделать зависимость между входом компенсатора  $u_{r\alpha}$  и выходом привода  $M_\alpha$  линейной —

$$M_\alpha = K_{cd} u_{r\alpha}, \quad (2.4)$$

где  $K_{cd} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м/В}$  (напряжение  $u_{r\alpha}$  численно равно моменту  $M_\alpha$ ).

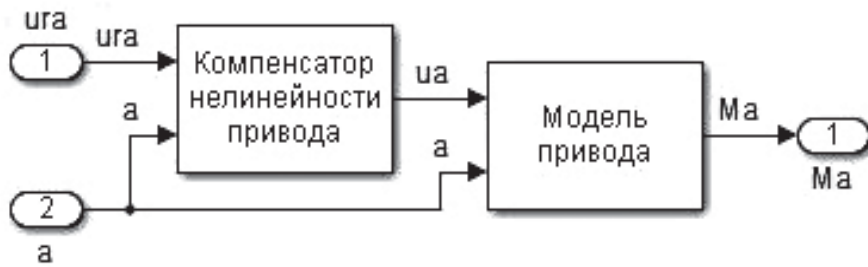


Рис. 2.4. Компенсатор нелинейности привода и модель привода  
(обозначение  $u_{ra}$  соответствует сигналу  $u_{r\alpha}$ )

Приравняем правые части уравнений (2.3) и (2.4) для нахождения зависимости  $u_\alpha$  от  $u_{r\alpha}$  и  $\alpha$  (уравнения компенсатора)

$$p_1(\alpha)u_\alpha + p_2(\alpha)u_\alpha^2 + p_3u_\alpha^3 = K_{cd}u_{r\alpha}.$$

Перепишем последнее уравнение

$$p_3u_\alpha^3 + p_2(\alpha)u_\alpha^2 + p_1(\alpha)u_\alpha + p_0(u_{r\alpha}) = 0,$$

где  $p_0(u_{r\alpha}) = -K_{cd}u_{r\alpha}$ . Решим это уравнение, то есть найдем его действительный корень  $u_\alpha(u_{r\alpha}, \alpha)$ , с помощью формулы Кардано [3, с. 146]. Если определим функции

$$p(\alpha) = \frac{p_1(\alpha)}{p_3} - \frac{p_2^2(\alpha)}{3p_3^2},$$


$$q(u_{r\alpha}, \alpha) = \frac{2p_2^3(\alpha)}{27p_3^3} - \frac{p_2(\alpha)p_1(\alpha)}{3p_3^2} + \frac{p_0(u_{r\alpha})}{p_3},$$

$$\begin{aligned}
 v(u_{r\alpha}, \alpha) &= \sqrt[3]{-\frac{q(u_{r\alpha}, \alpha)}{2} + \sqrt{\left[\frac{q(u_{r\alpha}, \alpha)}{2}\right]^2 + \left[\frac{p(\alpha)}{3}\right]^3}}, \\
 w(u_{r\alpha}, \alpha) &= \sqrt[3]{-\frac{q(u_{r\alpha}, \alpha)}{2} - \sqrt{\left[\frac{q(u_{r\alpha}, \alpha)}{2}\right]^2 + \left[\frac{p(\alpha)}{3}\right]^3}},
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

то уравнение компенсатора нелинейности привода



$$u_{\alpha}(u_{r\alpha}, \alpha) = v(u_{r\alpha}, \alpha) + w(u_{r\alpha}, \alpha) - \frac{p_2(\alpha)}{3p_3}. \quad (2.6)$$

## 2.4. Выполнение работы

1. Запустите MATLAB с помощью вашего ярлыка. Создайте новую папку, назвав ее ЛР№ 2 и сделав текущей. Создайте новую Simulink-модель, сохранив ее под именем TestAIandAO. Откройте окно параметров конфигурации Simulink-модели, нажав на кнопку , и внесите изменения, необходимые для работы со стендом. На вкладке Solver параметр Stop time установите inf (этот параметр не является необходимым, но задается таким, чтобы моделирование останавливалось только по вашей команде), параметр Type — Fixed-step (решатель с фиксированным шагом), а параметр Fixed-step size (fundamental sample time) — 0.001 (величина шага 0.001 с). На вкладке Code Generation в качестве целевого системного файла (System target file) выберите slrt.tlc (файл нужен для перевода кода Simulink-модели в код контроллера). Закройте окно, нажав ОК.

Добавьте в Simulink-модель блоки Analog input, Analog output и Setup (для модуля ввода/вывода IO102) библиотеки Simulink Real-Time: Speedgoat I/O Driver Library. Откройте окно пара-




метров блока Setup. Для группы параметров Module setup параметр Analog range установите  $\pm 5V$ . Для группы параметров Analog input setup параметр Input coupling установите Single-ended (имеем несимметричные сигналы с потенциометрических датчиков  $u_{p\alpha}$  и  $u_{p\beta}$ , передаваемые от стенда к модулю ввода/вывода IO102 по трем проводам, один из которых является общим). Для группы параметров Analog output setup параметр Channel vector установите [1 2] (нужны два канала аналогового выхода), параметр Initial value vector — [2.5 2.5] (значения напряжений  $u_{\beta}^*$  и  $u_{\alpha}^*$  до запуска программы контроллера и после ее завершения).

Запустите моделирование, нажав кнопку . У блока Analog input появилось 16 выходов, на пятнадцатом из которых напряжение  $u_{p\beta}$ , а на шестнадцатом  $u_{p\alpha}$ . У блока Analog output появилось два входа, на первый из которых следует подавать напряжение  $u_{\beta}^*$ , а на второй —  $u_{\alpha}^*$ . Остановите моделирование, нажав кнопку . Установите предназначенный для стенда режим моделирования External (Simulation > Mode). Соберите схему, переименуйте блоки и сделайте подписи согласно рис. 2.5.

Блок Manual Switch находится в библиотеке Signal Routing, блок Saturation — в библиотеке Discontinuities, а блок Scope — в библиотеке Simulink Real-Time > Displays and Logging. Задайте такие параметры блоков Saturation, при которых их выходной сигнал не выйдет за пределы диапазона от 0 до 5 В. Настройте блоки Scope для отображения значений сигналов в цифровом виде, заменив параметр Scope Mode на Numerical, параметр Numerical format на '%15.3f' (отображение с точностью до тысячных), а параметр Number of samples на 100 (показания обновляются 10 раз в секунду). На блоки Scope 3 и Scope 4 подаются значения  $u_{p\alpha}$  и  $u_{p\beta}$  после прохождения через фильтр нижних частот первого порядка с постоянной времени 0.1 с, который подавляет высокочастотные помехи. Сохраните собранную Simulink-модель и представьте ее на проверку руководителю работы.



2. Запустите Simulink-модель в режиме реального времени. Для этого:

- включите контроллер с помощью зеленого выключателя на шкафу и дождитесь появления изображения на его мониторе;
- постройте Simulink-модель с помощью кнопки ;
- при успешном построении Simulink-модели (в этом случае на экране монитора контроллера появятся окна блоков Scope, в противном случае появится окно Diagnostic Viewer с сообщением об ошибке (при возникновении ошибки Fatal error in slbuild перезапустите MATLAB)) соединитесь с контроллером с помощью кнопки ;
- включите стенд кнопкой (рис. 1.1 из работы № 1) и запустите Simulink-модель с помощью кнопки , но будьте готовы в любое время выключить стенд кнопкой (рис. 1.1 из работы № 1), чтобы не вывести его из строя при некорректной работе.

3. Используйте Simulink-модель TestAIandAO для проверки того, что отрицательные значения напряжения  $u_z$  активизируют катушку  $A$ . Для этого установите плату так, чтобы кольцо  $A$  лежало на катушке. Затем уменьшайте напряжение  $u_b$  с шагом 0.1 от нуля до значения, при котором плата будет перекинута на катушку  $C$ , используя блок Gain1 (нажимайте кнопку Apply после каждого изменения параметра Gain), и как только плата будет перекинута на катушку  $C$ , используйте блок Manual Switch1 для переключения на блок Ground. Зарегистрируйте значение  $u_b$ , при котором плата была перекинута на катушку  $C$ , то есть значение параметра Gain блока Gain1. Если вам интересно, то аналогичным образом проверьте, что отрицательные значения напряжения  $u_a$  активизируют катушку  $B$ .

4. Установите зависимость между напряжением  $u_{pa}$  с потенциометрического датчика и углом  $\alpha$  в градусах. Связь между



приращением угла  $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$  и приращением напряжения  $\Delta u_{p\alpha} = u_{p\alpha} - u_{p\alpha 0}$ , где  $\alpha_0$  — некоторое значение угла, при котором значение напряжения равно  $u_{p\alpha 0}$ , считайте линейной:

$$\Delta\alpha = k_{p\alpha} \Delta u_{p\alpha} \quad \Delta\alpha - \alpha_0 = k_{p\alpha} (u_{p\alpha} - u_{p\alpha 0}) \Rightarrow \alpha = k_{p\alpha} u_{p\alpha} + b_{p\alpha},$$

где  $k_{p\alpha} = \text{const}$ ,  $b_{p\alpha} = \alpha_0 - k_{p\alpha} u_{p\alpha 0} = \text{const}$ . Для вычисления  $k_{p\alpha}$  и  $b_{p\alpha}$  нужны два значения  $\alpha$ , в качестве которых используйте  $\alpha_{\min} = -6.5^\circ$  и  $\alpha_{\max} = +6.5^\circ$ , а также соответствующие им два значения  $u_{p\alpha}$ , то есть  $u_{p\alpha \min}$  и  $u_{p\alpha \max}$ , которые будут установлены экспериментально с помощью Simulink-модели TestAIandAO. Установите плату так, чтобы кольцо  $D$  лежало на катушке, а расстояние между кольцом  $A$  и катушкой было примерно равно расстоянию между кольцом  $C$  и катушкой, то есть чтобы  $\beta \approx 0$ . Зарегистрируйте значение  $u_{p\alpha \min}$  с помощью окна Score 3 на мониторе контроллера. Установите плату так, чтобы кольцо  $B$  лежало на катушке, а расстояние между кольцом  $A$  и катушкой было примерно равно расстоянию между кольцом  $C$  и катушкой, то есть чтобы  $\beta \approx 0$ . Зарегистрируйте значение  $u_{p\alpha \max}$  с помощью окна Score 3 на мониторе контроллера. Для нахождения значений  $k_{p\alpha}$  и  $b_{p\alpha}$  решите матричное уравнение


$$\begin{bmatrix} u_{p\alpha \min} & 1 \\ u_{p\alpha \max} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{p\alpha} \\ b_{p\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{\min} \\ \alpha_{\max} \end{bmatrix}$$

с помощью MATLAB. Создайте файл-сценарий, назвав его Volt2Deg. Занесите туда следующий код (присваивая переменным  $u_{p\alpha \min}$  и  $u_{p\alpha \max}$  экспериментально установленные значения):

```
clear% очистка Workspace
clc% очистка Command Window
amin = -6.5;
amax = +6.5;
upamin =
upamax =
```



```
X = mldivide ([upamin 1; upamax 1], [amin;
amax]);
disp 'kpa = ', disp (X (1))
disp 'bpa = ', disp (X (2))
```

В результате его выполнения в Command Window будут выведены значения  $k_{p\alpha}$  и  $b_{p\alpha}$ , которые для дальнейшего использования следует округлить до сотых. Аналогичным образом установите значения  $k_{p\beta}$  и  $b_{p\beta}$ , определяющие зависимость угла  $\beta$  в градусах от напряжения  $u_{p\beta}$  с потенциометрического датчика:  $\beta = k_{p\beta} u_{p\beta} + b_{p\beta}$ . Дополните файл Volt2Deg нужными командами. Замените параметры блоков Gain16, Constant16, Gain15 и Constant15 на значения  $k_{p\alpha}$ ,  $b_{p\alpha}$ ,  $k_{p\beta}$  и  $b_{p\beta}$ . С помощью окон Scope 1 и Scope 2 на мониторе контроллера проверьте правильность расчета значений  $k_{p\alpha}$ ,  $b_{p\alpha}$ ,  $k_{p\beta}$  и  $b_{p\beta}$ . Остановите Simulink-модель, нажав кнопку , и выключите стенд. Сохраните и закройте Simulink-модель TestAlandAO.

5. Ознакомьтесь с информацией о математической модели привода (подраздел 2.2).

6. Получите от руководителя работы Simulink-файл ExpVoltReg и Excel-файл ExpData. Поместите эти файлы в папку ЛР№ 2 и откройте файл ExpVoltReg. Данная Simulink-модель (рис. 2.6) предназначена для проведения экспериментов по регистрации значения напряжения  $u_{\alpha}$ . Длительность эксперимента 20 с. Имена некоторых блоков скрыты, что было сделано нажатием на блок правой кнопкой мыши, выбором пункта Format и снятием галочки напротив Show Block Name. Внутри подсистемы «Углы наклона платы» происходит перевод напряжений  $u_{p\alpha}$  и  $u_{p\beta}$  в значения углов  $\alpha$  и  $\beta$  в градусах. Переменные kpa, bpa, kpb и bpb, которые являются параметрами блоков Gain16, Constant16, Gain15 и Constant15, следует прикрепить к Simulink-модели. Для этого запишите команды, создающие эти переменные, с присвоением им значений, установленных на этапе 4,

в поле File > Model Properties > Model Properties > Callbacks > InitFcn. Сохраните Simulink-модель ExpVoltReg. На входы блока «Управление на привод» поступают сигналы управления  $u_\alpha$  и  $u_\beta$ , которые внутри блока преобразуются в сигналы  $u_\alpha^*$  и  $u_\beta^*$ , не выходящие за диапазон от 0 до 5 В. С помощью блока Constant SPa задается значение уставки  $\alpha_{sp}$ . Блоки Scope 1, Scope 3 и Scope 4 настроены для отображения на мониторе контроллера значений сигналов в цифровом виде с точностью до тысячных. Блок Scope 2 настроен для отображения на мониторе контроллера графика сигнала в диапазоне от  $-3$  до  $+3$  В.

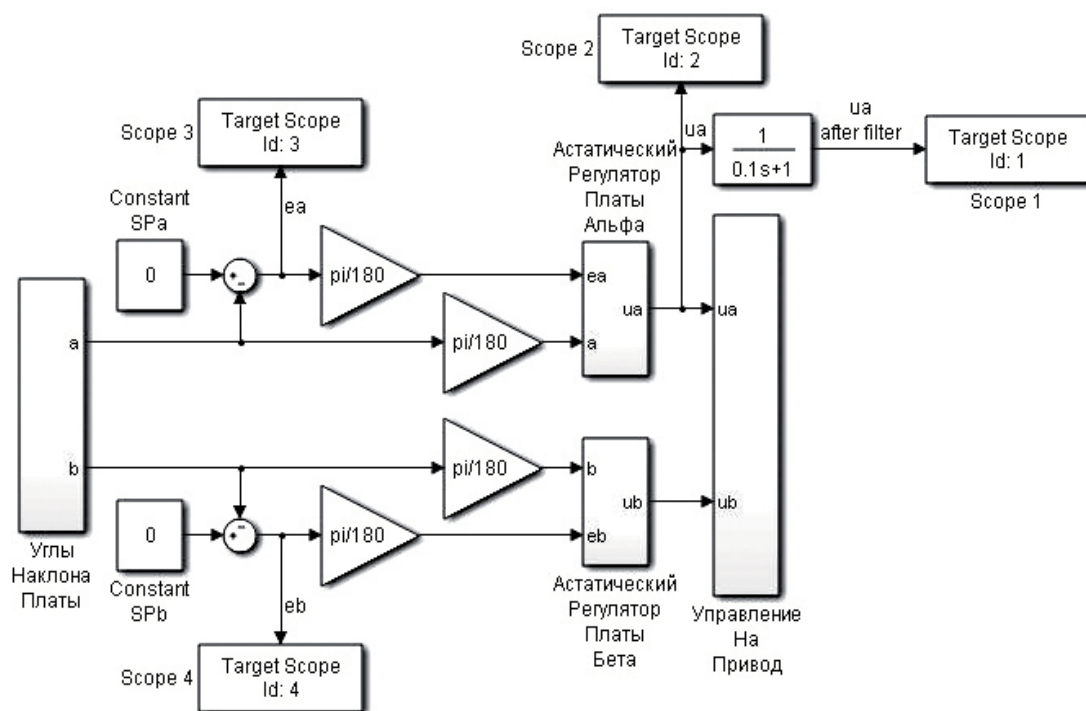



Рис. 2.6. Модель ExpVoltReg

Открыть файл ExpData можно как с помощью Excel, щелкнув по нему правой кнопкой мыши в текущей папке и выбрав Open Outside MATLAB, так и с помощью MATLAB, щелкнув по нему два раза левой кнопкой мыши. Откройте файл ExpData

в Excel. Ячейки, в которых записано NaN, нужны для последующего формирования двумерных массивов в MATLAB, загружаемых в приложение Curve Fitting. В рамках ограниченного времени лабораторной работы вы проведете всего семь экспериментов по регистрации напряжения  $u_\alpha$ , в результате которых заполните пустые ячейки (с зеленой заливкой) в Excel-файле ExpData. Заносите туда показания блока Score1, отображаемые после окончания эксперимента. Во избежание выхода стенда из строя (по причине перегрева) необходимо делать как минимум минутные перерывы между экспериментами. Перед началом эксперимента вручную выставляйте плату так, чтобы  $\alpha \approx \alpha_{sp}$  и  $\beta \approx 0$ . В момент окончания эксперимента старайтесь ловить плату, чтобы кольца не ударялись о катушки, но не искажайте при этом результат эксперимента. Запускайте моделирование в соответствии с указаниями этапа 2. Через некоторое время после начала эксперимента (после того как переходные процессы завершатся) плата должна занять положение, при котором  $\alpha = \alpha_{sp}$  и  $\beta = 0$ , и оставаться в таком положении до его окончания, что можно контролировать с помощью блоков Score3 и Score4. Если плата не выходит из режима колебаний, то успокойте ее вручную. Если вручную этого сделать не удастся, то попробуйте уменьшить значения коэффициентов регулятора.

7. Перезапустите MATLAB и сделайте папку ЛРН<sup>№</sup> 2 текущей. Нужно создать в Workspace три двумерных массива, соответствующие элементы которых содержат значения  $u_{\alpha n}$ ,  $\alpha_n$ ,  $M_{\alpha n}$ . С помощью MATLAB откройте заполненный вами и сохраненный после этого Excel-файл ExpData. В появившемся окне Import выделите диапазон ячеек D3: J28. Выберите Matrix в качестве варианта представления импортируемых данных в Workspace. В окне ввода над первой строкой имя этой матрицы замените на  $Ua$ . Для импорта нажмите на . Откройте в Workspace массив  $Ua$  из 26 строк и 7 столбцов и проверьте его содержимое.

Для формирования массива  $A$ , содержащего значения  $\alpha_n$  в радианах, введите в Command Window  $A = (\pi/180) * \text{ones}(26,1) * [-5.5 -3.25 -1.50 1.5 3.25 5.5] + 0 * Ua$ , где команда  $\text{ones}(26,1)$  формирует столбец из 26 единиц, а в результате прибавления  $0 * Ua$  соответствующие элементы массивов  $Ua$  и  $A$  будут иметь значение  $NaN$ . Под именем  $Mw$  импортируйте из Excel-файла в Workspace столбец, в котором содержится 26 значений моментов груза. Для формирования массива  $Ma$ , содержащего значения  $M_{\alpha n}$ , согласно (2.1), введите в Command Window  $Ma = -Mw * \text{ones}(1,7) - 7.88e-2 * A$ . В Workspace выделите массивы  $A$ ,  $Ma$ ,  $Mw$  и  $Ua$ , щелкните правой кнопкой мыши и выберите Save As для сохранения массивов под именем  $AMaMwUa$ .

8. Для запуска приложения Curve Fitting введите cftool в Command Window. Curve Fitting является инструментом для построения кривых и поверхностей на основании данных пользователя. С помощью Curve Fitting будут найдены численные значения коэффициентов  $p_{10}, p_{20}, p_{11}, p_{30}, p_{21}$  и  $p_{12}$  полинома (2.2). После открытия окна Curve Fitting Tool сохраните файл сессии под именем SurfaceMa, выполнив File > Save Session. В поле Fit name введите  $Ma = f(u_a, a)$ . В выпадающих списках X data, Y data и Z data выберите массивы  $Ua$ ,  $A$  и  $Ma$ . В выпадающем списке, расположенном правее, вместо Interpolant выберите Polynomial. Теперь в выпадающих списках Degrees x и y выберите, согласно (2.2), значения старших степеней  $u_\alpha$  и  $\alpha$ . Для выполнения условия  $f_\alpha(0, \alpha) = 0$  обнулите коэффициенты, которые не умножаются на  $u_\alpha$ . Нажмите кнопку Fit Options. Откроется окно, в котором указано, что для нахождения численных значений коэффициентов полинома используется линейный метод наименьших квадратов. Ограничьте в этом окне члены  $p_{00}, p_{01}$  и  $p_{02}$  снизу и сверху значением 0 и нажмите Close. Галочка напротив Center and scale стоять не должна. В поле Results представлены значения коэффициентов полинома и соответствующие им доверительные интервалы, а также значение

суммы квадратов ошибок SSE. Сохраните сессию, выполнив File > Save Session.

9. Согласно пункту 2.2.2 реализуйте в Simulink модель привода, используя блок MATLAB Function библиотеки User-Defined Functions и блок Saturation. Создайте в папке ЛР№ 2 новую Simulink-модель и сохраните ее под именем DriveAndCompensator. Добавьте в модель блок MATLAB Function, поменяв имя на «Модель привода». Двойным щелчком по блоку откройте редактор кода функции и занесите туда следующий код (присваивая локальным переменным блока  $p_{10}$ ,  $p_{20}$ ,  $p_{11}$ ,  $p_{30}$   $p_{21}$  и  $p_{12}$  значения, полученные на этапе 8):

```
function Ma = f (ua, a)
%#codegen
p10 =
p20 =
p11 =
p30 =
p21 =
p12 =
%
p1 = p10 + p11*a + p12*a^2;
p2 = p20 + p21*a;
p3 = p30;
%
Ma = p1*ua + p2*ua^2 + p3*ua^3;
```

Первая строка кода определяет функцию  $Ma$  двух переменных —  $ua$  и  $a$ .  $Ma$  соответствует выходу блок;  $ua$  и  $a$  соответствуют входам блока;  $a$  измеряется в радианах. На вход  $ua$  блока MATLAB Function подсоедините блок Saturation, выходной сигнал которого не выходит за пределы диапазона от  $-2.5$  до  $+2.5$  В.

10. Ознакомьтесь с информацией о компенсаторе нелинейности привода (параграф 2.3). Реализуйте компенсатор

нелинейности привода в Simulink, используя блок MATLAB Function. Добавьте в модель DriveAndCompensator блок MATLAB Function, поменяв имя на «Компенсатор нелинейности привода». Двойным щелчком по блоку откройте редактор кода функции и занесите туда следующий код (присваивая локальным переменным блока  $p_{10}$ ,  $p_{20}$ ,  $p_{11}$ ,  $p_{30}$ ,  $p_{21}$  и  $p_{12}$  значения, полученные на этапе 8):

```
function ua = f (ura, a)
    %#codegen
    Kcd = 1;
    p10 =
    p20 =
    p11 =
    p30 =
    p21 =
    p12 =
    %
    p0 = -Kcd*ura;
    p1 = p10 + p11*a + p12*a^2;
    p2 = p20 + p21*a;
    p3 = p30;
    %
    p = p1/p3 - (p2^2)/(3*p3^2);
    q = (2*p2^3)/(27*p3^3) - (p2*p1)/(3*p3^2) +
    p0/p3;
    v = nthroot (-q/2 + sqrt ((q/2)^2 +
    (p/3)^3), 3);
    w = nthroot (-q/2 - sqrt ((q/2)^2 +
    (p/3)^3), 3);
    ua = v + w - p2/(3*p3);
```

Первая строка кода определяет функцию  $ua$  двух переменных —  $ura$  и  $a$ .  $ua$  соответствует выходу блока;  $ura$  и  $a$  соот-

ветствуют входам блока;  $a$  измеряется в радианах. Сохраните Simulink-модель DriveAndCompensator.

11. В качестве домашнего задания в Simulink-модели DriveAndCompensator соберите схему, с помощью которой можно проверить работоспособность компенсатора.

## 2.5. Требования к содержанию отчета

1. Представить цели работы.
2. Представить текст файла Volt2Deg и округленные до сотых значения  $k_{p\alpha}$ ,  $b_{p\alpha}$ ,  $k_{p\beta}$  и  $b_{p\beta}$ .
3. Представить заполненную таблицу из Excel-файла ExpData.
4. Представить итоговые данные поля Results окна Curve Fitting Tool.
5. Представить рисунок схемы Simulink-модели DriveAndCompensator, с помощью которой вы проверяли работоспособность компенсатора, и написать, как происходит проверка.
6. Отчет оформляется на листах формата A4. Допускается рукописное, печатное или комбинированное оформление.

## 2.6. Контрольные вопросы

1. Почему устойчивая замкнутая система с астатическим регулятором при постоянной уставке имеет в установившемся режиме нулевую ошибку регулирования?
2. Каков характер зависимости между моментом привода, воздействующим на кольцо, и расстоянием до катушки?
3. Почему при реализации компенсатора в Simulink величина (2.5) вычисляется командой  $w = \text{nthroot}(-q/2 - \sqrt{((q/2)^2 + (p/3)^3}), 3)$ , а не командой  $w = (-q/2 - \sqrt{((q/2)^2 + (p/3)^3}))^{(1/3)}$ ?
4. При всех ли значениях угла  $\alpha$  в диапазоне от  $-6.5^\circ$  до  $+6.5^\circ$  величина, стоящая под квадратным корнем в выражении (2.5), положительна?

---

## Лабораторная работа № 3

### Синтез системы управления платой

#### 3.1. Цели работы

Выполнить синтез управления платой. Синтезировать Наблюдатель платы. Промоделировать синтезированную систему управления платой. Результаты моделирования проверить на стенде.

#### 3.2. Синтез управления платой

В работе № 1 была получена линейная модель платы в пространстве состояний, а в работе № 2 были разработаны модель привода и компенсатор его нелинейности. Из структурной схемы системы управления платой (рис. 3.1) видно, что в заключительной работе по разделу «Линейные непрерывные системы» нужно синтезировать регулятор платы, то есть алгоритм, по которому на основании значений уставки  $\alpha_{sp}$  и угла  $\alpha$  формируется управление  $u_{ra}$ . Синтез регулятора состоит из синтеза управления платой и синтеза Наблюдателя платы. При синтезе регулятора соединенные последовательно компенсатор и привод заменим на эквивалентный единичный коэффициент пе-



редачи  $K_{cd}$ . Тогда  $M_\alpha(t) = K_{cd}u_{r\alpha}(t)$ . С учетом этого перепишем уравнения модели платы в пространстве состояний из работы № 1:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_{cdp} u_{r\pm}(t), \quad (3.1a)$$

$$\alpha(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t), \quad (3.16)$$

где

$$\mathbf{B}_{cdp} = \mathbf{B}_p K_{cd} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ J_p \end{bmatrix} K_{cd} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_{cd} \\ J_p \end{bmatrix}.$$

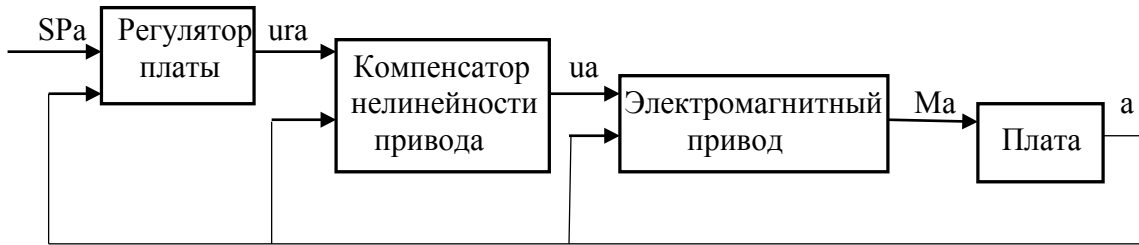


Рис. 3.1. Структурная схема системы управления платой

В этом подразделе будет описан синтез управления платой, при котором будем считать, что угловая скорость платы измеряется (рис. 3.2). Управляющий сигнал формируется в виде линейной комбинации уставки и переменных состояния:

$$u_{r\alpha}(t) = L_{SP} \alpha_{SP}(t) - L_{p1} \alpha(t) - L_{p2} \dot{\alpha}(t) = L_{SP} \alpha_{SP}(t) - \mathbf{L}_p \mathbf{x}_p(t),$$

где  $L_{sp}$  — коэффициент по уставке,  $\mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} L_{p1} & L_{p2} \end{bmatrix}$  — матрица обратной связи по вектору состояния. Подставив выражение для  $u_{r\alpha}(t)$  в уравнение (3.1a) и приведя подобные, получим уравнение замкнутой системы:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = (\mathbf{A}_p - \mathbf{B}_{cdp} \mathbf{L}_p) \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_{cdp} L_{SP} \alpha_{SP}(t). \quad (3.2)$$

Таким образом, матрица  $\mathbf{L}_p$  должна быть такой, что собственные числа  $p_{cp1}$  и  $p_{cp2}$  матрицы динамики замкнутой системы  $\mathbf{A}_p - \mathbf{B}_{cdp} \mathbf{L}_p$  имеют желаемые значения. Если система является управляемой [4, с. 128], то соответствующим выбором матрицы  $\mathbf{L}_p$  можно расположить собственные числа  $p_{cp1}$  и  $p_{cp2}$  в любых точках комплексной плоскости, причем если одно собственное число комплексное, то другое собственное число комплексно-сопряженное. Коэффициент  $L_{sp}$  должен быть таким, чтобы в установившемся режиме была обеспечена нулевая ошибка регулирования  $e_\alpha = \alpha_{SP} - \alpha$ , где  $\alpha_{SP} = \text{const}$ .

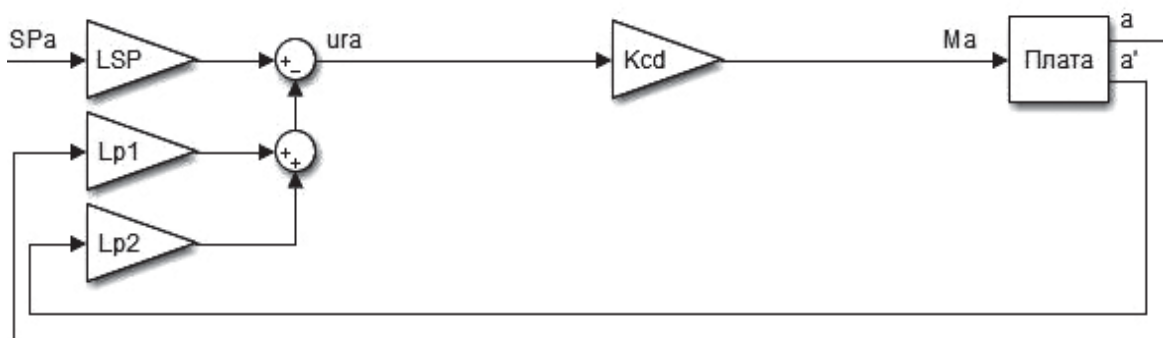


Рис. 3.2. Структурная схема системы, применяемая при синтезе управления платой

### 3.2.1. Выбор желаемых собственных чисел замкнутой системы

Желаемые собственные числа матрицы динамики замкнутой системы  $p_{cp1}$  и  $p_{cp2}$ , которые также являются полюсами передаточной функции замкнутой системы, могут быть выбраны на осно-

вании анализа переходных характеристик колебательного звена (рис. 3.3) с передаточной функцией

$$\frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} = \frac{1}{T^2 (s - p_{cp1})(s - p_{cp2})},$$

где  $0 < \zeta < 1$ , а

$$p_{cp1} = -\frac{\zeta}{T} + j\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} \text{ и } p_{cp2} = -\frac{\zeta}{T} - j\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}.$$

По переходной характеристике можно определить такие показатели качества, как время установления и перерегулирование. Время установления — это время, необходимое для того, чтобы процесс вошел в двухпроцентную трубку, прилегающую к установившемуся значению, и далее оставался в пределах этой трубки. Перерегулирование рассчитывается так:

$$\frac{c_m - c_{ss}}{c_{ss}} 100\%,$$

где  $c_m$  — максимальное значение процесса,  $c_{ss}$  — установившееся значение процесса. На рис. 3.3 представлены переходные характеристики при значениях  $\zeta$ , равных 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 в зависимости от  $t/T$ . Чем меньше значение  $\zeta$ , тем больше проявляются колебательные свойства и тем больше перерегулирование. При назначении желаемых собственных чисел следует использовать значение  $\zeta = 0.8$ , так как соответствующий процесс имеет наименьшее время установления, а также незначительное перерегулирование, равное 1.52 %. Параметр  $T$  определяется из требований ко времени установления  $T_s$ . Можно считать, что  $T_s = 4 / |\operatorname{Re} p_{cp1}| = 4T / \zeta$ . Тогда  $T = \zeta T_s / 4$ .

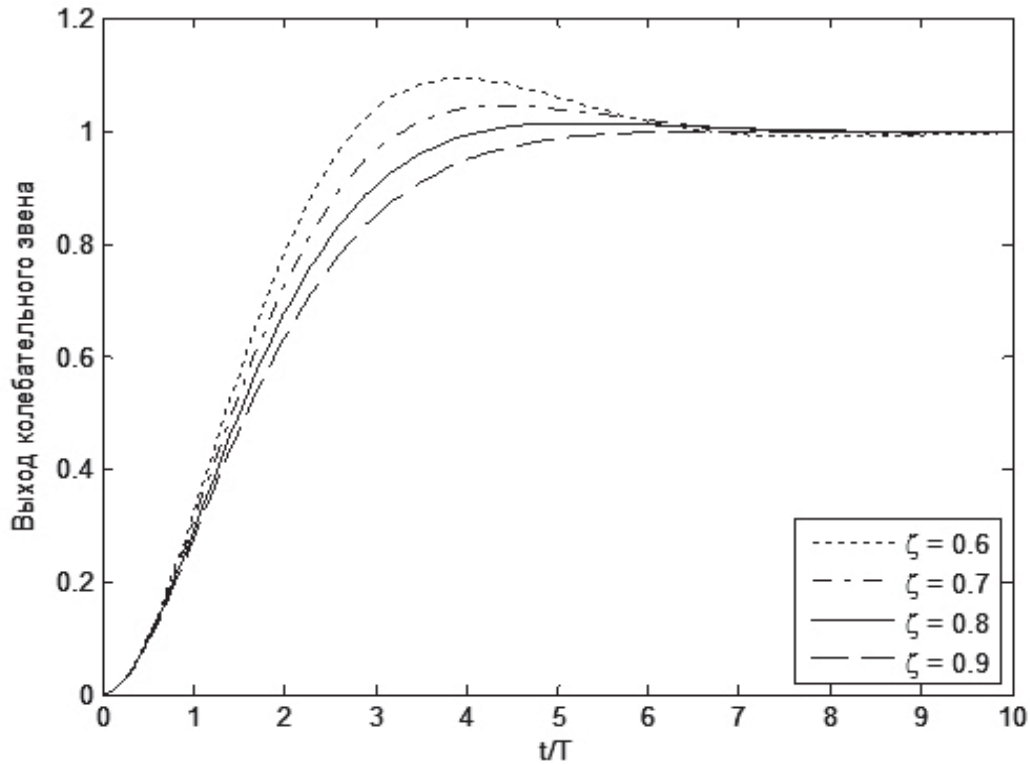


Рис 3.3. Переходные характеристики колебательного звена при различных  $\zeta$

### 3.2.2. Расчет матрицы обратной связи по вектору состояния

После выбора желаемых собственных чисел замкнутой системы  $p_{cp1}$  и  $p_{cp2}$  можно записать характеристический полином замкнутой системы:

$$(s - p_{cp1})(s - p_{cp2}) = s^2 + 2\frac{\zeta}{T}s + \frac{1}{T^2}.$$

Для замкнутой системы (3.2) матрица динамики

$$\mathbf{A}_p - \mathbf{B}_{cdp} \mathbf{L}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_k}{J_p} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_{cd}}{J_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{p1} & L_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_k - K_{cd}L_{p1}}{J_p} & -\frac{K_{cd}L_{p2}}{J_p} \end{bmatrix},$$

на основании которой также можно записать характеристический полином замкнутой системы:

$$\left| s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_p - \mathbf{B}_{cdp}\mathbf{L}_p) \right| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{K_{cd}L_{p1} - K_k}{J_p} & s + \frac{K_{cd}L_{p2}}{J_p} \end{vmatrix} = s^2 + \frac{K_{cd}L_{p2}}{J_p}s + \frac{K_{cd}L_{p1} - K_k}{J_p},$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица. Приравняем соответствующие коэффициенты характеристических полиномов

$$\frac{K_{cd}L_{p1} - K_k}{J_p} = \frac{1}{T^2} \text{ и } \frac{K_{cd}L_{p2}}{J_p} = 2\frac{\zeta}{T},$$

и выразим из этих равенств элементы матрицы обратной связи:

$$L_{p1} = \frac{J_p + K_k T^2}{K_{cd} T^2} \text{ и } L_{p2} = 2 \frac{J_p \zeta}{K_{cd} T}.$$

В MATLAB вычислить матрицу обратной связи по вектору состояния  $L_p$  на основании матриц динамики  $A_p$  и управления  $B_{cdp}$ , а также матрицы  $P_{cp}$  (может быть как строкой, так и столбцом), элементами которой являются желаемые собственные числа замкнутой системы, можно, используя как команду  $L_p = \text{acker}(A_p, B_{cdp}, P_{cp})$ , так и команду  $L_p = \text{place}(A_p, B_{cdp}, P_{cp})$ . Команда `acker` реализует формулу Аккермана, информация о которой представлена в [2, с. 386] и применима только для систем со скалярным управлением, то есть для систем, в которых матрица управления является столбцом. Команда `acker` позволяет задать кратные желаемые собственные числа замкнутой системы. Команда `place` применима для систем с векторным управлением, но кратность задаваемых желаемых собственных чисел замкнутой системы не должна превышать ранга матрицы управления.

### 3.2.3. Расчет коэффициента $L_{SP}$ в цепи уставки

При  $\alpha_{SP} = \text{const}$  в установившемся режиме  $\dot{\mathbf{x}}_p = 0$ . Тогда из уравнения замкнутой системы (3.2) можно выразить вектор состояния  $\mathbf{x}_p = -(\mathbf{A}_p - \mathbf{B}_{cdp} \mathbf{L}_p)^{-1} \mathbf{B}_{cdp} L_{SP} \alpha_{SP}$  и подставить его в уравнение для выхода (3.1б):  $\alpha = -\mathbf{C}_p (\mathbf{A}_p - \mathbf{B}_{cdp} \mathbf{L}_p)^{-1} \mathbf{B}_{cdp} L_{SP} \alpha_{SP}$ .  $\alpha = \alpha_{SP}$  при условии, что  $-\mathbf{C}_p (\mathbf{A}_p - \mathbf{B}_{cdp} \mathbf{L}_p)^{-1} \mathbf{B}_{cdp} L_{SP} = 1$ , где произведение матриц  $\mathbf{C}_p (\mathbf{A}_p - \mathbf{B}_{cdp} \mathbf{L}_p)^{-1} \mathbf{B}_{cdp}$  является скаляром, то есть

$$L_{SP} = -\frac{1}{\mathbf{C}_p (\mathbf{A}_p - \mathbf{B}_{cdp} \mathbf{L}_p)^{-1} \mathbf{B}_{cdp}}.$$

## 3.3. Синтез Наблюдателя платы

Для реализации синтезированного управления нужно располагать информацией как об угле наклона платы, так и об угловой скорости платы. Угол измеряется с помощью потенциометрического датчика, а угловая скорость не измеряется. Информацию об угловой скорости можно получить, пропустив измеряемое значение угла через звено реального дифференцирования. Так было сделано в работе № 2 при реализации астатического регулятора платы, представленного на рис. 2.3, где полюс передаточной функции звена реального дифференцирования равен  $-100$ . Если подать на вход звена реального дифференцирования сигнал, который содержит высокочастотный шум измерения, то на выходе звена шум существенно усилится. По этой причине для получения информации об угловой скорости будет использован Наблюдатель, то есть алгоритм, по которому на основании модели платы, а также управляющего сигнала  $u_{ra}(t)$

и измеряемого значения угла  $\alpha(t)$  формируется оценка угловой скорости, обозначаемая  $\hat{\alpha}(t)$ .

### 3.3.1. Наблюдатель платы полного порядка

Уравнение Наблюдателя платы полного порядка для модели платы (3.1а) и (3.1б) имеет вид:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_p(t) = \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{x}}_p(t) + \mathbf{B}_{cdp} u_{r\alpha}(t) + \mathbf{K}_p [\alpha(t) - \hat{\alpha}(t)],$$

где  $\mathbf{K}_p$  — матрица обратной связи по ошибке оценки угла. Подставив в уравнение  $\mathbf{C}_p \hat{\mathbf{x}}_p(t)$  вместо  $\hat{\alpha}(t)$  и приведя подобные члены, перепишем уравнение:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_p(t) = (\mathbf{A}_p - \mathbf{K}_p \mathbf{C}_p) \hat{\mathbf{x}}_p(t) + \mathbf{B}_{cdp} u_{r\alpha}(t) + \mathbf{K}_p \alpha(t), \quad (3.3)$$

согласно которому в Simulink реализована подсистема (рис. 3.4), где в блоках GainA и GainC параметр Multiplication установлен Matrix ( $K^*u$ ), так как посредством этих блоков реализовано матричное умножение  $\mathbf{A}_p \hat{\mathbf{x}}_p(t)$  и  $\mathbf{C}_p \hat{\mathbf{x}}_p(t)$ .

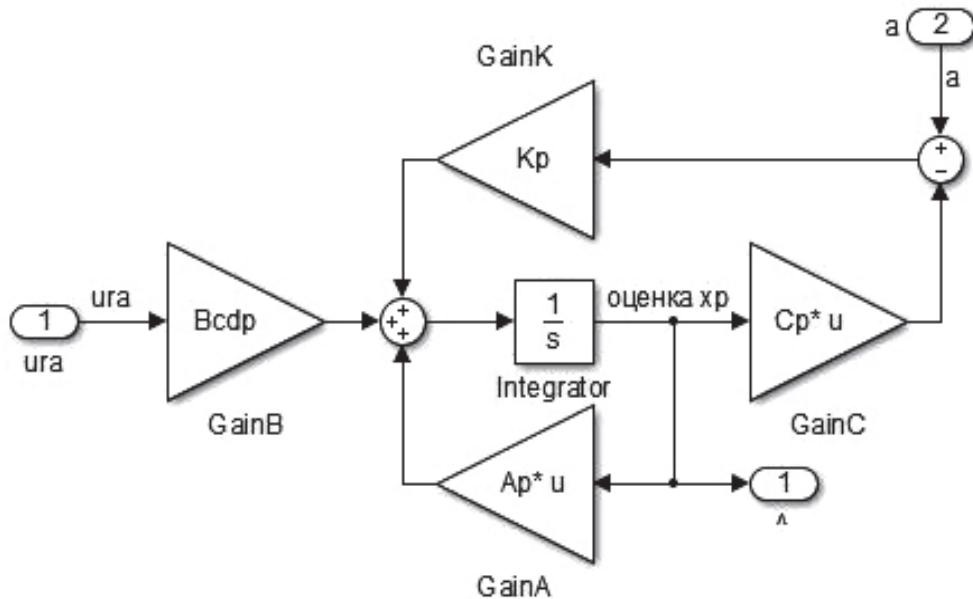


Рис. 3.4. Подсистема, реализующая Наблюдатель платы полного порядка

Рассмотрим ошибку оценки вектора состояния  $\mathbf{e}_p(t) = \mathbf{x}_p(t) - \hat{\mathbf{x}}_p(t)$ . Продифференцируем это равенство и подставим вместо  $\dot{\mathbf{x}}_p(t)$  и  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}_p(t)$  правые части уравнений (3.2) и (3.3):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_p(t) &= \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_{cdp} u_{r\pm}(t) - (\mathbf{A}_p - \mathbf{K}_p \mathbf{C}_p) \hat{\mathbf{x}}_p(t) - \mathbf{B}_{cdp} u_{r\alpha}(t) - \mathbf{K}_p \alpha(t) = \\ &= \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) - (\mathbf{A}_p - \mathbf{K}_p \mathbf{C}_p) \hat{\mathbf{x}}_p(t) - \mathbf{K}_p \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t) = (\mathbf{A}_p - \mathbf{K}_p \mathbf{C}_p) [\mathbf{x}_p(t) - \hat{\mathbf{x}}_p(t)] = \\ &= (\mathbf{A}_p - \mathbf{K}_p \mathbf{C}_p) \mathbf{e}_p(t).\end{aligned}$$

Решение однородного дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{e}}_p(t) = (\mathbf{A}_p - \mathbf{K}_p \mathbf{C}_p) \mathbf{e}_p(t)$$

имеет вид

$$\mathbf{e}_p(t) = \exp[(\mathbf{A}_p - \mathbf{K}_p \mathbf{C}_p)t] \mathbf{e}_p(0).$$

Если  $\mathbf{e}_p(0) \neq 0$ , а матрица динамики Наблюдателя  $\mathbf{A}_p - \mathbf{K}_p \mathbf{C}_p$  имеет собственные числа  $p_{ep1}$  и  $p_{ep2}$  в левой полуплоскости, то можно считать, что ошибка будет сведена к нулю за время, равное  $4 / \min(|\operatorname{Re} p_{ep1}|, |\operatorname{Re} p_{ep2}|)$ . Практика показывает, что это время должно быть в 2–4 раза меньше, чем требуемое время установления  $T_s$ , задаваемое при выборе желаемых собственных чисел замкнутой системы  $p_{cp1}$  и  $p_{cp2}$ . Если система является наблюдаемой [4, с. 132], то соответствующим выбором матрицы  $\mathbf{K}_p$  можно расположить собственные числа  $p_{ep1}$  и  $p_{ep2}$  в любых точках комплексной плоскости.

В пункте 3.2.2 было сказано, что в MATLAB, используя как команду

$$Lp = \text{acker}(Ap, Bcdp, Pcp),$$



так и команду

$$Lp = \text{place}(Ap, Bcdp, Pcp),$$

можно вычислить такую матрицу  $L_p$ , при которой у замкнутой системы (3.2) характеристический полином  $\det(sI - A_p + B_{cdp} L_p)$  имеет в качестве корней желаемые собственные числа  $p_{cp1}$  и  $p_{cp2}$ . Учитывая это, а также то, что у Наблюдателя (3.3) характеристический полином

$$\det(sI - A_p + K_p C_p) = \det(sI - A_p + K_p C_p)^T = \det(sI - A_p^T + C_p^T K_p^T),$$

можно вычислить такую матрицу  $K_p^T$ , при которой этот характеристический полином имеет в качестве корней желаемые собственные числа  $p_{ep1}$  и  $p_{ep2}$ , используя как команду

$$KpT = \text{acker}(Ap.', Cp.', Pcp),$$

так и команду

$$KpT = \text{place}(Ap.', Cp.', Pcp),$$

где оператор  $.$ ' производит транспонирование, а элементами матрицы  $Pcp$  (может быть как строкой, так и столбцом) являются желаемые собственные числа Наблюдателя. Непосредственно вычислить матрицу  $K_p$  можно, используя как команду

$$Kp = \text{acker}(Ap.', Cp.', Pcp).',$$

так и команду

$$Kp = \text{place}(Ap.', Cp.', Pcp).'$$

### 3.3.2. Наблюдатель платы пониженного порядка

Первая координата вектора состояния  $x_p(t)$  измеряется, причем шум измерения незначителен. Следовательно, при формировании управляющего сигнала предпочтительнее использо-

вать  $\alpha(t)$ , а не  $\hat{\alpha}(t)$ . В таком случае оценка  $\hat{\alpha}(t)$ , формируемая Наблюдателем платы полного порядка, является излишней. По указанной причине целесообразно синтезировать Наблюдатель, дающий только оценку  $\dot{\hat{\alpha}}(t)$ , то есть Наблюдатель пониженного порядка.

Перепишем уравнение (3.1а):

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \ddot{\alpha}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_k}{J_p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_{cd}}{J_p} \end{bmatrix} u_{r\alpha}(t),$$

и перейдем от него к двум уравнениям:

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{K_k}{J_p} \alpha(t) + \frac{K_{cd}}{J_p} u_{r\alpha}(t)$$

и

$$\dot{\hat{\alpha}}(t) = \dot{\alpha}(t).$$

Эти два уравнения можно получить из уравнений (3.1а) и (3.1б), если в последних уравнениях заменить  $\mathbf{x}_p(t)$  на  $\dot{\alpha}(t)$ ,  $\mathbf{A}_p$  на 0,  $\mathbf{B}_{cdp} u_{r\alpha}(t)$  на

$$\frac{K_k}{J_p} \alpha(t) + \frac{K_{cd}}{J_p} u_{r\alpha}(t),$$

$\alpha(t)$  на  $\dot{\alpha}(t)$  и  $\mathbf{C}_p$  на 1. Если же провести эти замены в уравнении Наблюдателя платы полного порядка (3.3), то получим уравнение Наблюдателя платы пониженного порядка:

$$\ddot{\hat{\alpha}}(t) = (0 - K_{1p} \cdot 1) \hat{\alpha}(t) + \frac{K_k}{J_p} \alpha(t) + \frac{K_{cd}}{J_p} u_{r\pm}(t) + K_{1p} \dot{\alpha}(t), \quad (3.4)$$

где коэффициент  $K_{lp}$  задает желаемое собственное число Наблюдателя  $p_{ep}$ . С учетом команд MATLAB для вычисления матрицы  $\mathbf{K}_p^T$  (пункт 3.3.1), а также того, что последнее уравнение получено заменой в уравнении (3.3) матриц  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{C}_p$  и  $\mathbf{K}_p$  на скаляры 0, 1 и  $K_{lp}$ , можно сделать вывод, что коэффициент  $K_{lp}$  можно вычислить как командой

$$K1p = \text{acker}(0, 1, p_{ep}),$$

так и командой

$$K1p = \text{place}(0, 1, p_{ep}),$$

где  $p_{ep}$  — переменная, значение которой равно желаемому собственному числу Наблюдателя.

Правая часть уравнения (3.4) содержит переменную  $\dot{\alpha}(t)$ , для исключения которой введем новую переменную  $q(t) = \hat{\alpha}(t) - K_{lp}\alpha(t)$ , тогда  $\hat{\alpha}(t) = q(t) + K_{lp}\alpha(t)$ . Подставим в уравнение (3.4)  $q(t) + K_{lp}\alpha(t)$  вместо  $\hat{\alpha}(t)$ :

$$\dot{q}(t) + K_{lp}\dot{\alpha}(t) = -K_{lp}[q(t) + K_{lp}\alpha(t)] + \frac{K_k}{J_p}\alpha(t) + \frac{K_{cd}}{J_p}u_{r\alpha}(t) + K_{lp}\dot{\alpha}(t)$$

и получим дифференциальное уравнение относительно  $q$ :

$$\dot{q}(t) = -K_{lp}q(t) + \frac{K_{cd}}{J_p}u_{r\alpha}(t) + \frac{K_k - J_p K_{lp}^2}{J_p}\alpha(t),$$

которое в паре с уравнением

$$\hat{\alpha}(t) = q(t) + K_{lp}\alpha(t)$$

описывает Наблюдатель платы пониженного порядка (рис. 3.5), реализуемый без использования  $\dot{\alpha}(t)$ .

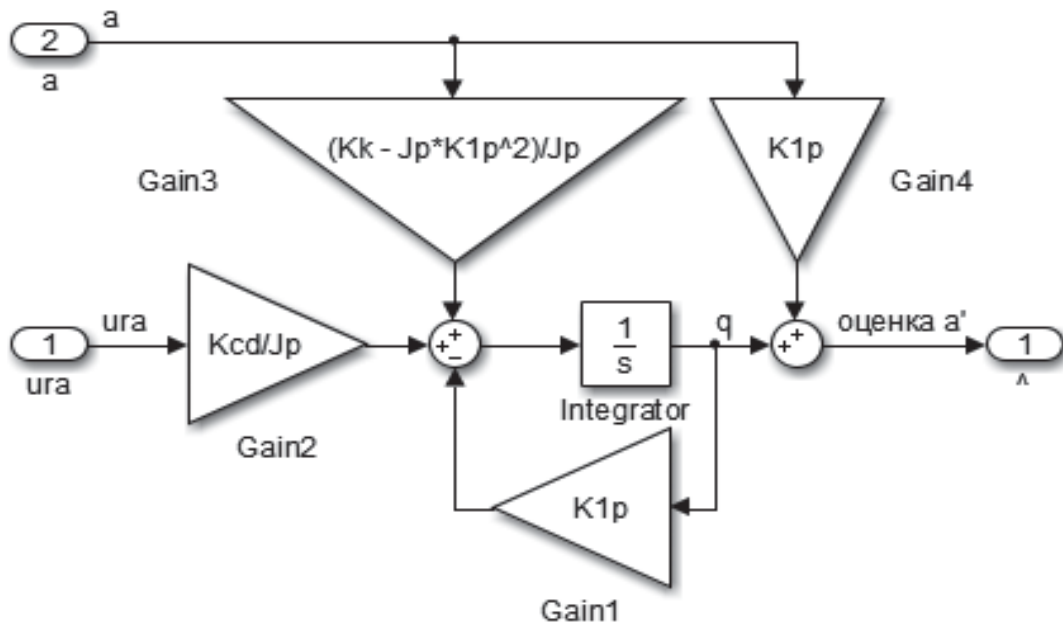


Рис. 3.5. Подсистема, реализующая Наблюдатель платы пониженного порядка

### 3.4. Выполнение работы

1. Запустите MATLAB с помощью вашего ярлыка. Создайте новую папку, назвав ее LPN№ 3 и сделав текущей. Создайте файл-сценарий, сохранив его под именем ScriptPlateCS. Весь код MATLAB, используемый при дальнейших вычислениях, записывайте в этот файл. Создайте Simulink-модель, сохранив ее под именем ModelPlateCS. В качестве инициализирующего файла прикрепите к этой модели файл ScriptPlateCS.

2. Ознакомьтесь с процедурой синтеза управления платой (параграф 3.2).

3. Определите, является ли система управляемой [4, с. 130], представив все необходимые расчеты. Проверьте расчеты с ис-

пользованием MATLAB. В этом вам могут помочь команды `ctrb` и `rank`, первая из которых вычисляет матрицу управляемости, а вторая — ранг матрицы.

4. Выберите желаемые собственные числа замкнутой системы  $p_{cp1}$  и  $p_{cp2}$  согласно пункту 3.2.1 (рекомендуется требовать время установления  $T_s$ , равное 0.4 с). Используйте MATLAB для вычисления матрицы обратной связи  $L_p$  с помощью формул для  $L_{p1}$  и  $L_{p2}$  из пункта 3.2.2, а также с помощью команд `acker` и `place`. Убедитесь, что оба способа вычисления матрицы  $L_p$  дают одинаковый результат. Используйте MATLAB для вычисления коэффициента  $L_{sp}$  согласно пункту 3.2.3.

5. Руководствуясь рис. 3.2, соберите в Simulink-модели ModelPlateCS схему для проверки синтезированного управления платой. В качестве модели платы используйте подсистему «Линейная модель платы» из Simulink-модели ModelPlate работы № 1. Добавьте в эту подсистему блок Out1, изменив его имя на  $a'$  и подав на него значение угловой скорости (при необходимости обнулите параметр Initial condition в интеграторе, на выходе которого имеем угол наклона платы в радианах). Для получения переходной характеристики замкнутой системы используйте в качестве уставки  $\alpha_{sp}(t)$  ступенчатое воздействие (блок Step библиотеки Sources). Создайте из схемы подсистему, назвав ее «Проверка синтезированного управления». Если в результате моделирования, время которого установите на свое усмотрение, система устойчива, а время установления, перерегулирование и установившаяся ошибка регулирования удовлетворяют требованиям, на основании которых выполнялся синтез, то переходите к следующему этапу.

6. Ознакомьтесь с процедурой синтеза Наблюдателя платы (параграф 3.3).

7. Определите, является ли система наблюдаемой [4, с. 134], представив все необходимые расчеты. Проверьте расчеты с использованием MATLAB. В этом вам могут помочь команды `obsv`

и rank, первая из которых вычисляет матрицу наблюдаемости, а вторая — ранг матрицы.

8. Синтезируйте Наблюдатель платы полного (согласно пункту 3.3.1) или пониженного (согласно пункту 3.3.2) порядка и создайте в Simulink-модели ModelPlateCS соответствующую подсистему, представленную на рис. 3.4 или 3.5.

9. В Simulink-модели ModelPlateCS создайте копию подсистемы «Проверка синтезированного управления». Измените имя копии подсистемы на «Проверка наблюдателя платы». В переименованную подсистему добавьте подсистему, реализующую Наблюдатель платы (созданную на этапе 8), и измените схему так, чтобы проверить работоспособность Наблюдателя. Выполните моделирование при  $\alpha_{sp}(t) = 0$  и  $\mathbf{x}_p(0) \neq 0$ , по результатам которого можно установить, что Наблюдатель сводит ненулевую в начальный момент времени ошибку оценки к нулю. Установите время, за которое это происходит. Также выполните моделирование, в результате которого получите переходную характеристику замкнутой системы с Наблюдателем. Если результаты как первого, так и второго моделирования удовлетворяют требованиям, на основании которых выполнялся синтез, то переходите к следующему этапу.

10. В Simulink-модели ModelPlateCS создайте копию подсистемы «Проверка Наблюдателя платы». Измените имя копии подсистемы на «Система управления платой». В переименованную подсистему добавьте из Simulink-модели DriveAndCompensator работы № 2 блоки Компенсатор нелинейности привода, Saturation и Модель привода. Измените схему согласно рис. 3.6. Выполните несколько моделирований при различных сочетаниях ступенчатого воздействия и начальных условий, наблюдая как за углом  $\alpha(t)$ , так и за напряжением  $u_\alpha(t)$ . Если результаты моделирований вас устраивают, то переходите к проверке системы управления платой на стенде.

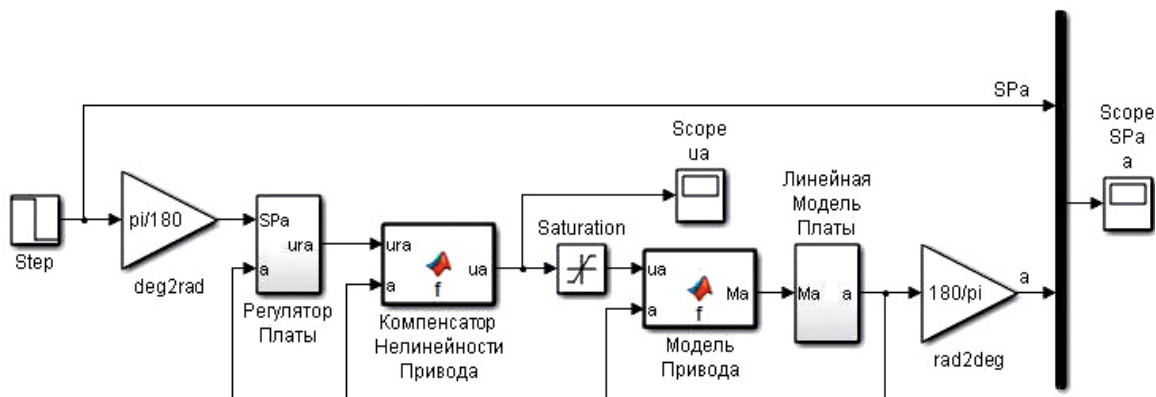


Рис. 3.6. Подсистема «Система управления платой»

11. Скопируйте в папку ЛР № 3 файл Simulink-модели ExpVoltReg из работы № 2, изменив имя файла на CheckPlateCS. Откройте эту Simulink-модель и в качестве инициализирующего файла прикрепите файл ScriptPlateCS для того, чтобы в результате его выполнения значения переменных  $k_{pa}$ ,  $b_{pa}$ ,  $k_{pb}$  и  $b_{pb}$  не были удалены из Workspace. Из Simulink-модели ModelPlateCS добавьте подсистему «Регулятор платы», а также блоки «Компенсатор нелинейности привода» и Saturation. Для проверки синтезированной системы управления применительно к углу  $\alpha$  измените Simulink-модель CheckPlateCS согласно рис. 3.7. У блока Scope 1 параметр Scope mode замените на Graphical sliding, параметр Y-axis limits установите  $[-7, 7]$ , а параметр Number of samples замените на 20000. Блок Scope 5 является копией блока Scope 2. Для сохранения значений сигналов  $\alpha(t)$  и  $\alpha_{sp}(t)$  в рабочую область MATLAB использованы блоки To Workspace библиотеки Sinks. Параметр Variable name каждого блока To Workspace измените согласно рис. 3.7, а параметр Save format установите Array. У блока To Workspace2 параметр Save 2-D signals as установите 2-D array (concatenating along first dimension). Предоставьте Simulink-модель CheckPlateCS на проверку руководителю работы, после чего сохраните ее.

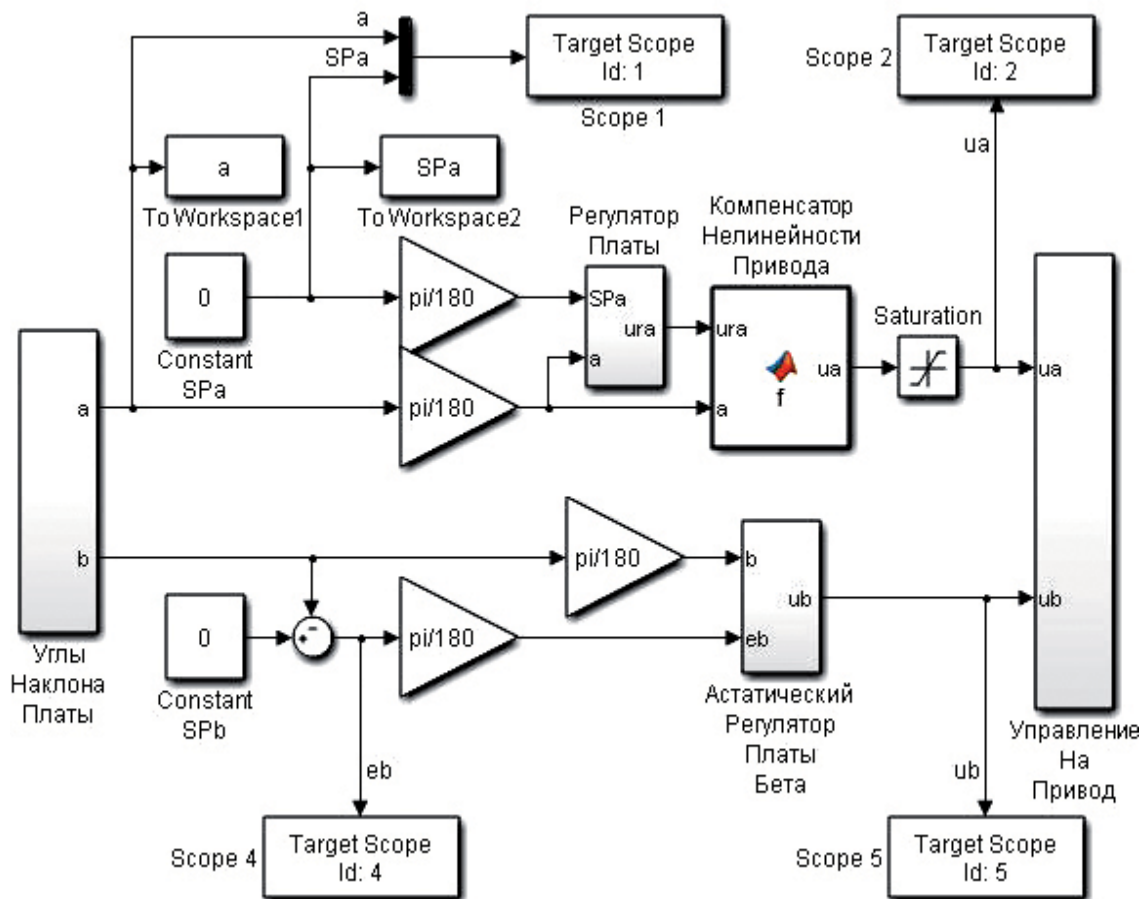


Рис. 3.7. Модель CheckPlateCS

Перезапустите MATLAB, сделайте папку ЛР № 3 текущей, откройте Simulink-модель CheckPlateCS и запустите ее в режиме реального времени. Изменяйте уставку с помощью блока Constant SPa. Сравните уровни высокочастотного шума сигналов  $u_\alpha(t)$  и  $u_\beta(t)$ . В отчете рекомендуется представить совмещенные графики процессов  $\alpha(t)$  и  $\alpha_{sp}(t)$ , где  $\alpha_{sp}(t)$  следует изменять **вручную** с помощью блока Constant SPa примерно через одинаковые промежутки времени согласно рис. 3.8 (при необходимости увеличьте время моделирования). После выполнения Simulink-модели в рабочей области появятся массивы  $a$  и  $SPa$ , которые могут иметь различное число элементов, так как в них отсутствуют данные за малый начальный промежуток времени.



Если массивы  $a$  и  $SPa$  имеют различное число элементов, то сделайте его одинаковым, удалив данные за первую секунду, введя в Command Window:

```
T = str2num (get_param...
('CheckPlateCS','StopTime'))
T = (T - 1)*1000;
a = a (end - T: end);
SPa = SPa (end - T: end);
save ('aSPa.mat','a','SPa')
```

(в результате выполнения первой команды в переменную  $T$  помещается значение времени моделирования, а в результате выполнения последней команды в текущей папке создается файл  $aSPa.mat$ , который содержит массивы  $a$  и  $SPa$ , имеющие одинаковое количество элементов). Сравните результаты проверки на стенде с результатами моделирования. Подумайте о причинах различий. Проверьте синтезированную систему управления применительно к углу  $\beta$ .

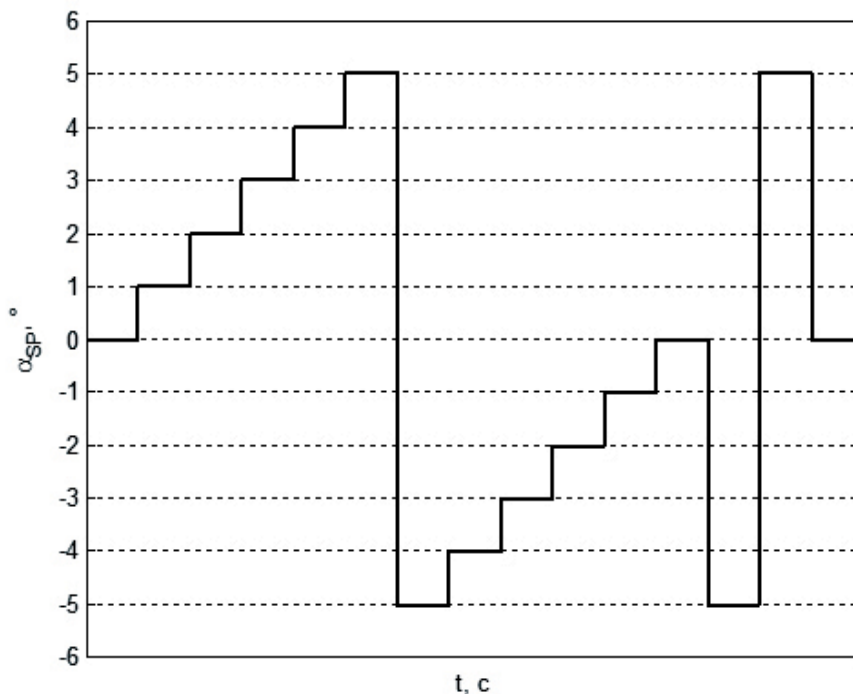


Рис. 3.8. Рекомендуемый вид уставки

12. Синтезированная система является статической. Несмотря на коэффициент  $L_{sp}$ , который обеспечивает при моделировании нулевую установившуюся ошибку регулирования, проверка на стенде показала, что эта ошибка отлична от нуля. Это можно объяснить тем, что в модели платы не учтено трение, а также тем, что значения параметров  $J_p$  и  $K_k$  являются приближенными. Параметры  $J_p$  и  $K_k$  были рассчитаны с использованием значений геометрических размеров платы и колец, а также справочных значений их плотностей, но точный вид пластика, из которого изготовлена плата, неизвестен. Следовательно, неизвестно и точное значение плотности платы (при расчете было взято среднее значение плотности для двух видов пластика, похожих на пластик платы). Конечно, для уточнения значений параметров  $J_p$  и  $K_k$ , а также определения параметров, характеризующих трение, может быть применена идентификация. Под идентификацией понимают определение (оценку) значений параметров модели по результатам сравнения измеренного выхода стенда с выходом модели. Но идентификация параметров неустойчивого объекта, которым является плата, представляет собой трудную задачу. Данная задача на момент написания этих строк авторами не решена. С учетом вышесказанного имеет смысл синтезировать астатическое управление платой, что вы и сделаете в качестве домашнего задания. Для этого расширьте модель платы в пространстве состояний (3.1а) и (3.1б), введя третью переменную состояния  $x_I(t)$ , для которой  $\dot{x}_I(t) = \alpha_{sp}(t) - \alpha(t)$ . Можете формировать управляющий сигнал как в виде линейной комбинации переменных состояния расширенной системы:

$$u_{r\pm}(t) = -L_{pI1}\alpha(t) - L_{pI2}\dot{\alpha}(t) - L_{pI3}x_I(t) = -\mathbf{L}_{pI}\mathbf{x}_{pI}(t),$$

так и в виде линейной комбинации уставки и переменных состояния расширенной системы

$$u_{r\alpha}(t) = L_{pI1}\alpha_{sp}(t) - L_{pI1}\alpha(t) - L_{pI2}\dot{\alpha}(t) - L_{pI3}x_I(t) = L_{pI1}\alpha_{sp}(t) - \mathbf{L}_{pI}\mathbf{x}_{pI}(t).$$

Матрицу  $L_{pI}$  вычислите с помощью MATLAB. Проверьте синтезированное управление в Simulink. Подобный синтез рассмотрен в [2, с. 416].

### 3.5. Требования к содержанию отчета

1. Представить цели работы.
2. Представить расчеты и сделанный на их основе вывод относительно управляемости.
3. Представить расчеты и сделанный на их основе вывод относительно наблюдаемости.
4. Представить рисунки схем подсистем «Проверка синтезированного управления», «Проверка Наблюдателя платы» и «Регулятор платы» Simulink-модели ModelPlateCS.
5. Представить совмещенные графики процессов  $\alpha(t)$  и  $\alpha_{sp}(t)$ , полученных при проверке системы управления на стенде.
6. Расписать процесс синтеза астатического управления платой. Представить рисунок Simulink-схемы, с помощью которой выполнялась проверка синтезированного управления.
7. Представить текст файла ScriptPlateCS.
8. Отчет оформляется на листах формата A4. Допускается рукописное, печатное или комбинированное оформление.

### 3.6. Контрольные вопросы

1. Чему равна постоянная времени колебательного звена, передаточная функция которого

$$\frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1},$$

и какое соотношение существует между постоянной времени и временем установления?

2. Равна ли передаточная функция колебательного звена, полюсами которого являются желаемые собственные числа замкнутой системы, передаточной функции от  $\alpha_{sp}(t)$  до  $\alpha(t)$  этой системы замкнутой обратной связью по вектору состояния  $\mathbf{x}_p(t)$ ?

3.а. Если вы синтезировали Наблюдатель платы полного порядка, а  $\alpha_{sp}(t)$  и  $\alpha(t)$  считаются входом и выходом, то что вы можете сказать про переходные характеристики системы с обратной связью по вектору состояния  $\mathbf{x}_p(t)$  и системы с обратной связью по оценке вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}_p(t)$ ?

3.б. Если вы синтезировали Наблюдатель платы пониженного порядка, а  $\alpha_{sp}(t)$  и  $\alpha(t)$  считаются входом и выходом, то что вы можете сказать про переходные характеристики системы с обратной связью по вектору состояния  $\mathbf{x}_p(t)$  и системы с обратной связью по углу  $\alpha(t)$ , а также по оценке угловой скорости  $\dot{\hat{\alpha}}(t)$ ?

4. Чему равны собственные числа замкнутой системы с Наблюдателем?

5. Как повлияет увеличение быстродействия Наблюдателя на его фильтрующие свойства относительно высокочастотного шума?

---

## *Лабораторная работа № 4*

### Цифровой синтез системы управления шаром и платой

#### 4.1. Цели работы

Линеаризовать математическое описание шара на плате, полученное в работе № 1. Выполнить синтез управления платой. Синтезировать Наблюдатель платы. Выполнить синтез управления шаром с учетом регулятора платы (на замкнутой плате). Синтезировать Наблюдатель шара. Промоделировать синтезированную систему управления шаром на плате. Результаты моделирования проверить на стенде.

#### 4.2. Математическое описание шара на плате и его линеаризация

В лабораторной работе № 1 с помощью уравнения Лагранжа второго рода были получены дифференциальные уравнения второго порядка, описывающие нелинейную математическую модель шара на плате:

$$\frac{m_b R_b^2 + J_b}{R_b^2} \ddot{x} - m_b (x\dot{\alpha} + y\dot{\beta})\dot{\alpha} + m_b g \sin \alpha = 0, \quad (4.1a)$$

$$\frac{m_b R_b^2 + J_b}{R_b^2} \ddot{y} - m_b (x\dot{\alpha} + y\dot{\beta})\dot{\beta} + m_b g \sin \beta = 0, \quad (4.16)$$

$$(J_p + J_b) \ddot{\alpha} + m_b (2x\dot{x}\dot{\alpha} + x^2\ddot{\alpha} + x\dot{y}\dot{\beta} + xy\ddot{\beta} + y\dot{x}\dot{\alpha}) + m_b gx \cos \alpha - K_k \sin \alpha \cos \beta = M_\alpha, \quad (4.1в)$$

$$(J_p + J_b) \ddot{\beta} + m_b (y\dot{x}\dot{\alpha} + xy\ddot{\alpha} + 2y\dot{y}\dot{\beta} + y^2\ddot{\beta} + x\dot{y}\dot{\alpha}) + m_b gy \cos \beta - K_k \cos \alpha \sin \beta = M_\beta, \quad (4.1г)$$

Из уравнений (4.1а)–(4.1г) найдем выражения для вторых производных:

$$\ddot{x} = \frac{m_b R_b^2}{m_b R_b^2 + J_b} (x\dot{\alpha} + y\dot{\beta})\dot{\alpha} - \frac{m_b g R_b^2}{m_b R_b^2 + J_b} \sin \alpha = f_1(x, \dot{\alpha}, y, \dot{\beta}, \alpha),$$

$$\ddot{y} = \frac{m_b R_b^2}{m_b R_b^2 + J_b} (x\dot{\alpha} + y\dot{\beta})\dot{\beta} - \frac{m_b g R_b^2}{m_b R_b^2 + J_b} \sin \beta = f_2(x, \dot{\alpha}, y, \dot{\beta}, \beta),$$

$$\ddot{\alpha} = - \frac{m_b (2x\dot{x}\dot{\alpha} + x\dot{y}\dot{\beta} + y\dot{x}\dot{\alpha} + gx \cos \alpha) - K_k \sin \alpha \cos \beta - M_\alpha}{J_p + J_b + m_b x^2} - \frac{m_b xy}{J_p + J_b + m_b x^2} \ddot{\beta},$$

$$\ddot{\beta} = - \frac{m_b (y\dot{x}\dot{\alpha} + 2y\dot{y}\dot{\beta} + x\dot{y}\dot{\alpha} + gy \cos \beta) - K_k \cos \alpha \sin \beta - M_\beta}{J_p + J_b + m_b y^2} - \frac{m_b xy}{J_p + J_b + m_b y^2} \ddot{\alpha}.$$

Из правых частей последних двух уравнений исключим  $\ddot{\alpha}$  и  $\ddot{\beta}$ .

Подставим значение производной  $\ddot{\beta}$  в уравнение для  $\ddot{\alpha}$  и выразим  $\ddot{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = & - \frac{m_b (2x\dot{x}\dot{\alpha} + x\dot{y}\dot{\beta} + y\dot{x}\dot{\alpha} + gx \cos \alpha) - K_k \sin \alpha \cos \beta - M_\alpha}{J_p + J_b + m_b x^2} + \\ & + \frac{m_b xy}{J_p + J_b + m_b x^2} \frac{m_b (y\dot{x}\dot{\alpha} + 2y\dot{y}\dot{\beta} + x\dot{y}\dot{\alpha} + gy \cos \beta) - K_k \cos \alpha \sin \beta - M_\beta}{J_p + J_b + m_b y^2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{m_b xy}{J_p + J_b + m_b x^2} \frac{m_b xy}{J_p + J_b + m_b y^2} \ddot{\alpha}.$$

Преобразуем, перенесем слагаемые, содержащие  $\ddot{\alpha}$ , и приведем подобные:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \frac{m_b xy}{J_p + J_b + m_b x^2} \frac{m_b xy}{J_p + J_b + m_b y^2} \ddot{\alpha} &= \frac{(J_p + J_b + m_b x^2)(J_p + J_b + m_b y^2) - m_b^2 x^2 y^2}{(J_p + J_b + m_b x^2)(J_p + J_b + m_b y^2)} \ddot{\alpha} = \\ &= \frac{(J_p + J_b)^2 + m_b(J_p + J_b)(x^2 + y^2)}{(J_p + J_b + m_b x^2)(J_p + J_b + m_b y^2)} \ddot{\alpha} = \frac{(J_p + J_b)[J_p + J_b + m_b(x^2 + y^2)]}{(J_p + J_b + m_b x^2)(J_p + J_b + m_b y^2)} \ddot{\alpha}. \end{aligned}$$

Приравняем получившееся выражение левой части к правой части и выразим  $\ddot{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - (J_p + J_b + m_b y^2) \frac{m_b(2x\dot{x}\dot{\alpha} + x\dot{y}\dot{\beta} + y\dot{x}\dot{\beta} + gx \cos \alpha) - K_k \sin \alpha \cos \beta - M_\alpha}{(J_p + J_b)[J_p + J_b + m_b(x^2 + y^2)]} + \\ + m_b xy \frac{m_b(y\dot{x}\dot{\alpha} + 2y\dot{y}\dot{\beta} + x\dot{y}\dot{\alpha} + gy \cos \beta) - K_k \cos \alpha \sin \beta - M_\beta}{(J_p + J_b)[J_p + J_b + m_b(x^2 + y^2)]} = \\ = f_3(x, \dot{x}, \alpha, \dot{\alpha}, y, \dot{y}, \beta, \dot{\beta}). \end{aligned}$$

Подставим найденное значение производной  $\ddot{\alpha}$  в уравнение для  $\ddot{\beta}$  и выразим  $\ddot{\beta}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} &= - \frac{m_b(y\dot{x}\dot{\alpha} + 2y\dot{y}\dot{\beta} + x\dot{y}\dot{\alpha} + gy \cos \beta) - K_k \cos \alpha \sin \beta - M_\beta}{J_p + J_b + m_b y^2} + \\ &+ \frac{m_b xy}{J_p + J_b + m_b y^2} \frac{m_b(2x\dot{x}\dot{\alpha} + x\dot{y}\dot{\beta} + y\dot{x}\dot{\beta} + gx \cos \alpha) - K_k \sin \alpha \cos \beta - M_\alpha}{J_p + J_b + m_b x^2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{m_b xy}{J_p + J_b + m_b y^2} \frac{m_b xy}{J_p + J_b + m_b x^2} \ddot{\beta}.$$

Преобразуем, перенесем слагаемые содержащие  $\ddot{\beta}$  и приведем подобные, получим левую часть исходного уравнения):

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} - \frac{m_b xy}{J_p + J_b + m_b y^2} \frac{m_b xy}{J_p + J_b + m_b x^2} \ddot{\beta} &= \frac{(J_p + J_b + m_b x^2)(J_p + J_b + m_b y^2) - m_b^2 x^2 y^2}{(J_p + J_b + m_b x^2)(J_p + J_b + m_b y^2)} \ddot{\beta} = \\ &= \frac{(J_p + J_b)^2 + (J_p + J_b)m_b(x^2 + y^2)}{(J_p + J_b + m_b x^2)(J_p + J_b + m_b y^2)} \ddot{\beta} = \frac{(J_p + J_b)[J_p + J_b + m_b(x^2 + y^2)]}{(J_p + J_b + m_b x^2)(J_p + J_b + m_b y^2)} \ddot{\beta}. \end{aligned}$$

Приравняем получившееся выражение левой части к правой части и выразим  $\ddot{\beta}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} &= -(J_p + J_b + m_b x^2) \frac{m_b (y\dot{x}\dot{\alpha} + 2y\dot{y}\dot{\beta} + x\dot{y}\dot{\alpha} + gy \cos \beta) - K_k \cos \alpha \sin \beta - M_\beta}{(J_p + J_b)[J_p + J_b + m_b(x^2 + y^2)]} + \\ &+ m_b xy \frac{m_b (2x\dot{x}\dot{\alpha} + x\dot{y}\dot{\beta} + y\dot{x}\dot{\beta} + gx \cos \alpha) - K_k \sin \alpha \cos \beta - M_\alpha}{(J_p + J_b)[J_p + J_b + m_b(x^2 + y^2)]} = \\ &= f_4(x, \dot{x}, \alpha, \dot{\alpha}, y, \dot{y}, \beta, \dot{\beta}). \end{aligned}$$

Определим вектор состояния  $\mathbf{x} = [x \ y \ \alpha \ \beta \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta}]^T$  и вектор управления  $\mathbf{u} = [M_\alpha \ M_\beta]^T$ . Линеаризации будет подвергнуто уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]^T$$

в рабочей точке  $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{u}_0 = [0 \ 0]^T$ . Тогда  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}$ , а  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}$ , где  $\Delta \mathbf{x}$  и  $\Delta \mathbf{u}$  — отклонения векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{u}$  от рабочей точки.



Разложив эти уравнения в ряд Тейлора, получим линеаризованное уравнение в отклонениях

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}, \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — якобианы [1],

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\alpha}} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\beta}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\alpha}} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\beta}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{\alpha}} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{\beta}} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_4}{\partial \beta} & \frac{\partial f_4}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial f_4}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial f_4}{\partial \dot{\alpha}} & \frac{\partial f_4}{\partial \dot{\beta}} \end{bmatrix}_{\substack{x = x_0 \\ u = u_0}};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial M_\alpha} & \frac{\partial f_1}{\partial M_\beta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial M_\alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial M_\beta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial M_\alpha} & \frac{\partial f_3}{\partial M_\beta} \\ \frac{\partial f_4}{\partial M_\alpha} & \frac{\partial f_4}{\partial M_\beta} \end{bmatrix}_{\substack{x = x_0 \\ u = u_0}}.$$

Частные производные функций  $f_3$  и  $f_4$  в рабочей точке найдены с использованием Symbolic Math Toolbox пакета MATLAB:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{m_b g R_b^2}{m_b R_b^2 + J_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{m_b g R_b^2}{m_b R_b^2 + J_b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m_b g}{J_p + J_b} & 0 & \frac{K_k}{J_p + J_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m_b g}{J_p + J_b} & 0 & \frac{K_k}{J_p + J_b} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{J_p + J_b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_p + J_b} \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем будем рассматривать только линеаризованную модель шара на плате (символ  $\Delta$  будем опускать).

Анализируя матрицы уравнения (4.2), можно сделать вывод, что на координату шара  $x$  оказывает влияние только угол накло-

на платы  $\alpha$  и момент привода  $M_\alpha$ , а на координату шара  $y$  — только угол наклона платы  $\beta$  и момент привода  $M_\beta$ . Поэтому от уравнения (4.2) можно перейти к двум независимым уравнениям

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_k}{J_p + J_b} & 0 & -\frac{m_b g}{J_p + J_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m_b g R_b^2}{m_b R_b^2 + J_b} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} M_\alpha, \quad (4.3a)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \ddot{\beta} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_k}{J_p + J_b} & 0 & -\frac{m_b g}{J_p + J_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m_b g R_b^2}{m_b R_b^2 + J_b} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\beta} \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} M_\beta, \quad (4.3б)$$

которые имеют одинаковые матрицы динамики и управления. С учетом этого дальнейший синтез выполним применительно к системе (4.3a). Результаты, полученные для этой системы, без изменений применим и для системы (4.3б).

### 4.3. Цифровой синтез системы управления

Для объекта произведем двухчастотный синтез системы управления с использованием модального метода. Структурная система управления представлена на рис. 4.1.

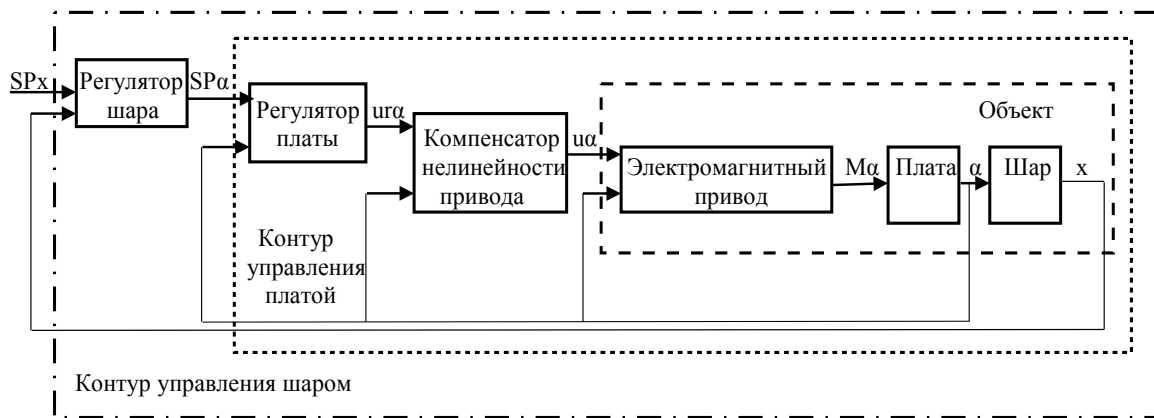


Рис. 4.1. Структурная схема системы управления координатой  $x$  шара на плате

Внутренний контур объекта (контур управления платой, или «замкнутая плата») должен быть более быстродействующим, чем внешний контур системы управления (контур управления шаром), а следовательно, должен работать с большей частотой квантования сигналов по времени.

С помощью потенциометров измеряются сигналы углового положения платы, а потом оцифровываются с частотой 1000 Гц, значит, минимальный период квантования, с которым возможно сделать цифровой регулятор  $T_{HF} = 0.001 \text{ с} = 1 \text{ мс}$  (HF — high frequency — высокая частота).

Камера фиксирует положение шара и делает 25 кадров в секунду, а значит, максимальная частота внешнего контура управления составит 25 Гц, и период квантования внешнего контура управления должен быть кратен 40 мс. Наименьшее время квантования внешнего контура —  $T_{LF} = 0.04 \text{ с} = 40 \text{ мс}$  (LF — low frequency — низкая частота).

Далее в работе индексу  $i$  соответствует период дискретизации  $T_{HF}$ , а индексу  $l$  — период дискретизации  $T_{LF}$ .

## 4.4. Цифровой синтез управления платой

В работе № 3 была синтезирована непрерывная система управления платой. При цифровом синтезе системы управления следует пользоваться моделью объекта с цифровым управлением, а собственные числа матрицы динамики могут быть получены эквивалентным пересчетом исходных собственных чисел на комплексной плоскости  $p$  в эквивалентные собственные числа на плоскости  $z$ .

Исходя из уравнения (4.3а), запишем непрерывную математическую модель платы:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_{kard}}{J_p + J_b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_p + J_b} \end{bmatrix} M_\alpha + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{m_b g}{J_p + J_b} \end{bmatrix} x,$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix},$$

где  $x$  — координата шара, который своим весом оказывает действие на плату.

Структурная схема платы, эквивалентная этим уравнениям, с учетом компенсации возмущения шара представлена на рис. 4.2.

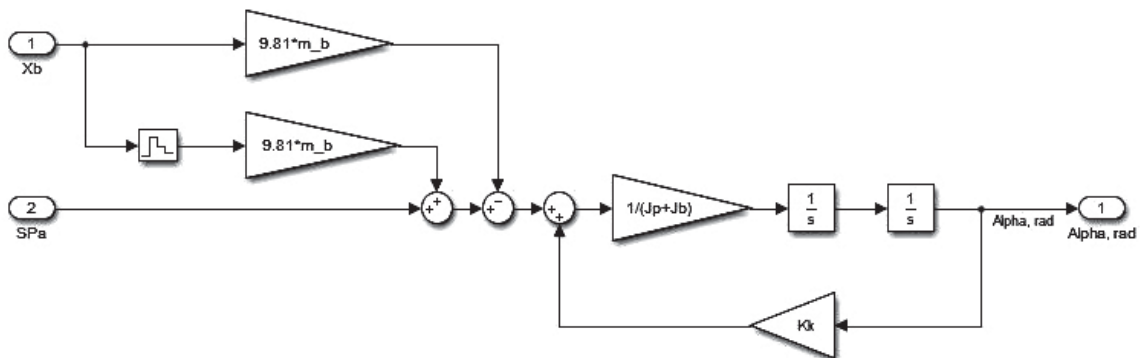


Рис. 4.2. Структурная схема платы с компенсацией возмущения шара

Компенсация воздействия силы тяжести шара на плату будет учтена в регуляторе, как показано на рис. 4.2, поэтому для синтеза управления не будем учитывать эту составляющую. При синтезе регулятора соединенные последовательно компенсатор и привод (см. работу № 2) заменим на эквивалентный единичный коэффициент передачи  $K_{cd}$ , имеющий размерность Нм/В. Тогда  $M_\alpha(t) = K_{cd}u_{r\alpha}(t)$ .

С учетом всего этого перепишем модель платы:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_{cdp} u_{r\alpha}(t),$$

$$\alpha(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p(t),$$

где

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_{kard}}{J_p + J_b} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{cdp} = \mathbf{B}_p K_{cd} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_{cd}}{J_p + J_b} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_p = [1 \quad 0].$$

После этого перейдем от непрерывной модели к цифровой с периодом дискретизации  $T_{HF}$ . В результате получим:

$$\mathbf{x}_p[i+1] = \mathbf{A}_{pHF} \mathbf{x}_p[i] + \mathbf{B}_{cdpHF} u_{r\alpha}[i], \quad (4.4a)$$

$$y_p[i] = \mathbf{C}_{pHF} \mathbf{x}_p[i]. \quad (4.4b)$$

Матрицы этих уравнений рассчитываются по формулам

$$\mathbf{A}_{pHF} = e^{\mathbf{A}_p T_{HF}},$$

$$\mathbf{B}_{cdpHF} = \int_{\sigma=0}^{T_{HF}} e^{\mathbf{A}_p \sigma} \mathbf{B}_{cdp} d\sigma,$$

$$\mathbf{C}_{pHF} = \mathbf{C}_p.$$

В MATLAB, для того чтобы перевести непрерывную модель в цифровую, необходимо [5]:

1. Записать матрицы системы ( $A_p, B_p, C_p, D_p$ ) в скрипт-файл;
2. Найти непрерывную модель объекта в пространстве состояний, для этого записать:

```
sys_p = ss (Ap, Bp, Cp, Dp);
```

3. Найти цифровую модель в пространстве состояний:

```
sys_p_HF = c2d (sys_p, T_HF)
```

4. Найти матрицы искомой цифровой модели:

```
[ApHF, BpHF, CpHF, DpHF] = ssdata (sys_p_HF).
```

В этом параграфе будет описан синтез управления платой, при котором будем считать, что угловая скорость платы измеряется. Управляющий сигнал формируется в виде линейной комбинации уставки и переменных состояния:

$$u_{r\alpha}[i] = L_{SPHF} \alpha_{SP}[i] - L_{pHF1} \alpha[i] - L_{pHF2} \dot{\alpha}[i] = L_{SPHF} \alpha_{SP}[i] - \mathbf{L}_{pHF} \mathbf{x}_p[i],$$

где  $L_{SPHF}$  — коэффициент по уставке,  $\mathbf{L}_{pHF} = \begin{bmatrix} L_{pHF1} & L_{pHF2} \end{bmatrix}$  — матрица обратной связи по вектору состояния. Подставив выражение для  $u_{r\alpha}[i]$  в уравнение (4.4 а) и приведя подобные, получим уравнение замкнутой системы:

$$\mathbf{x}_p[i+1] = (\mathbf{A}_{pHF} - \mathbf{B}_{cdpHF} \mathbf{L}_{pHF}) \mathbf{x}_p[i] + \mathbf{B}_{cdpHF} L_{SPHF} \alpha_{SP}[i]. \quad (4.5)$$

Матрица  $\mathbf{L}_{pHF}$  должна быть такой, чтобы матрица динамики замкнутой системы  $\mathbf{A}_{su\_pHF} = \mathbf{A}_{pHF} - \mathbf{B}_{cdpHF} \mathbf{L}_{pHF}$  имела желаемые значения собственных чисел  $z_{p1}$  и  $z_{p2}$ . Коэффициент  $L_{SPHF}$  должен быть таким, чтобы в установившемся режиме

была обеспечена нулевая ошибка регулирования  $e_\alpha = \alpha_{sp} - \alpha$ , где  $\alpha_{sp} = \text{const}$ .

#### 4.4.1. Выбор желаемых собственных чисел цифровой замкнутой системы

В работе № 3 объяснено, как выбирать желаемые числа замкнутой непрерывной системы. Используем эту информацию для выбора желаемых чисел цифровой замкнутой системы. Выбрав желаемые собственные числа замкнутой непрерывной системы  $p_{cp1}$  и  $p_{cp2}$ , от них перейдем к полюсам в  $z$ -плоскости:

$$z_{p1} = e^{p_{cp1} \cdot T_0}, \quad z_{p2} = e^{p_{cp2} \cdot T_0},$$

где  $T_0$  — это период дискретизации цифровой системы.

#### 4.4.2. Расчет матрицы обратной связи по вектору состояния

В MATLAB вычислить матрицу обратной связи по вектору состояния  $\mathbf{L}_{pHF}$  на основании матриц динамики  $\mathbf{A}_{pHF}$  и управления  $\mathbf{B}_{cdpHF}$ , а также матрицы  $\mathbf{Z}_{pHF}$  ( $\mathbf{Z}_{pHF}$  может быть как строкой, так и столбцом), элементами которой являются желаемые собственные числа замкнутой системы, можно используя как оператор

$$\mathbf{L}_{pHF} = \text{acker}(\mathbf{A}_{pHF}, \mathbf{B}_{cdpHF}, \mathbf{Z}_{pHF}),$$

так и оператор

$$\mathbf{L}_{pHF} = \text{place}(\mathbf{A}_{pHF}, \mathbf{B}_{cdpHF}, \mathbf{Z}_{pHF}).$$

Оператор `acker` позволяет задавать кратные полюса, в отличие от оператора `place`.

#### 4.4.3. Расчет коэффициента по уставке

При  $\alpha_{sp}[i] = \alpha_{sp} = \text{const}$  в установившемся режиме (при больших  $i$ )  $\mathbf{x}_p[i+1] = \mathbf{x}_p[i] = \mathbf{x}_{p_{уст}}$ . Тогда из уравнения замкнутой системы (4.5) можно выразить вектор состояния



$$\mathbf{x}_{p\_ycm} = -(\mathbf{A}_{pHF} - \mathbf{B}_{cdpHF} \mathbf{L}_{pHF} - E)^{-1} \mathbf{B}_{cdpHF} L_{SP HF} \alpha_{SP}.$$

Подставив его в уравнение для выхода (4.46), получим:

$$\alpha_{ycm} = -\mathbf{C}_{pHF} (\mathbf{A}_{pHF} - \mathbf{B}_{cdpHF} \mathbf{L}_{pHF} - E)^{-1} \mathbf{B}_{cdpHF} L_{SP HF} \alpha_{SP}.$$

Для того чтобы выполнялось равенство  $\alpha_{ycm} = \alpha_{SP}$ , необходимо выполнить условие

$$-\mathbf{C}_{pHF} (\mathbf{A}_{pHF} - \mathbf{B}_{cdpHF} \mathbf{L}_{pHF} - E)^{-1} \mathbf{B}_{cdpHF} L_{SP HF} = 1,$$

где произведение матриц  $\mathbf{C}_{pHF} (\mathbf{A}_{pHF} - \mathbf{B}_{cdpHF} \mathbf{L}_{pHF} - E)^{-1} \mathbf{B}_{cdpHF}$  является скаляром. Отсюда получаем:

$$L_{SP HF} = -\frac{1}{-\mathbf{C}_{pHF} (\mathbf{A}_{pHF} - \mathbf{B}_{cdpHF} \mathbf{L}_{pHF} - E)^{-1} \mathbf{B}_{cdpHF}}.$$

## 4.5. Синтез дискретного Наблюдателя платы

Для реализации синтезированного управления нужно располагать информацией как об угле наклона платы  $\alpha$ , так и об угловой скорости платы  $\dot{\alpha}$ . Угол измеряется с помощью потенциометрического датчика, а угловая скорость не измеряется. Для получения информации об угловой скорости будет использован Наблюдатель, то есть алгоритм, по которому на основании модели платы, а также управляющего сигнала  $u_{r\alpha}[i]$  и измеряемого значения угла  $\alpha[i]$  формируется оценка угловой скорости, обозначаемая  $\hat{\dot{\alpha}}[i]$ .

#### 4.5.1. Дискретный Наблюдатель платы полного порядка

Уравнение Наблюдателя платы полного порядка для модели платы (4.4а) и (4.4б) имеет вид:

$$\hat{\mathbf{x}}_p[i+1] = \mathbf{A}_{pHF} \hat{\mathbf{x}}_p[i] + \mathbf{B}_{cdpHF} u_{ra}[i] + \mathbf{K}_{pHF} [\alpha[i] - \hat{\alpha}[i]],$$

где  $\mathbf{K}_p$  — матрица обратной связи по ошибке оценки угла. Подставив в уравнение  $\mathbf{C}_p \hat{\mathbf{x}}_p[i]$  вместо  $\hat{\alpha}[i]$  и приведя подобные, перепишем уравнение

$$\hat{\mathbf{x}}_p[i+1] = (\mathbf{A}_{pHF} - \mathbf{K}_{pHF} \mathbf{C}_{pHF}) \hat{\mathbf{x}}_p[i] + \mathbf{B}_{cdpHF} u_{ra}[i] + \mathbf{K}_{pHF} \alpha[i], \quad (4.6)$$

согласно которому в Simulink реализована подсистема (рис. 4.3). В блоках GainA и GainC параметр Multiplication установлен Matrix ( $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}$ ), так как посредством этих блоков реализовано матричное умножение  $\mathbf{A}_p \hat{\mathbf{x}}_p[i]$  и  $\mathbf{C}_p \hat{\mathbf{x}}_p[i]$ . Блок Unit Delay, находящийся в библиотеке Discrete, является блоком задержки. В параметрах этого блока должен быть указан период квантования  $T_{HF}$ .

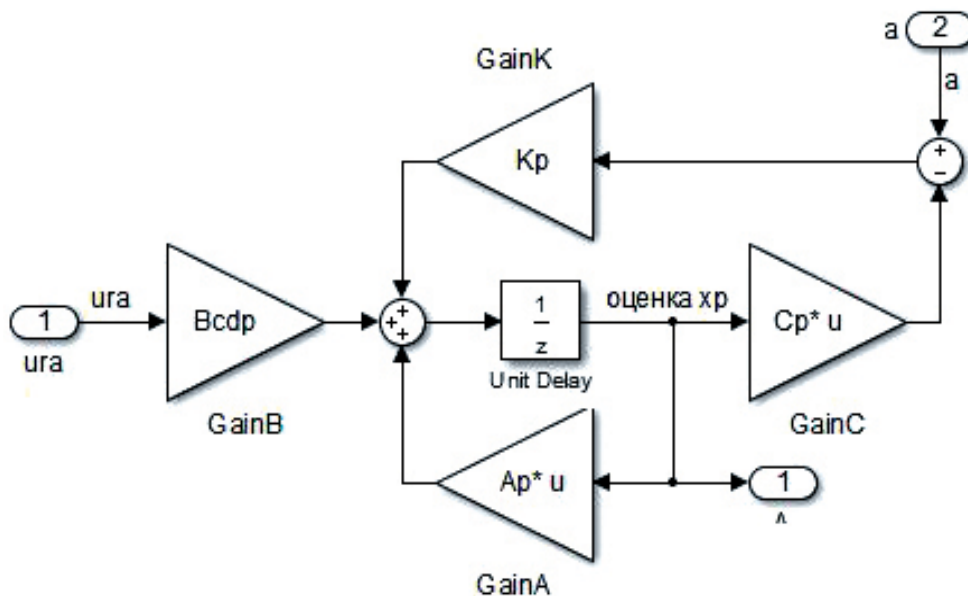


Рис. 4.3. Подсистема, реализующая Наблюдатель платы полного порядка

Рассмотрим ошибку оценки вектора состояния  $\mathbf{e}_p[i] = \mathbf{x}_p[i] - \hat{\mathbf{x}}_p[i]$ ,

$$\mathbf{e}_p[i+1] = \mathbf{x}_p[i+1] - \hat{\mathbf{x}}_p[i+1].$$

Подставив в последнее равенство вместо  $\mathbf{x}_p[i+1]$  и  $\hat{\mathbf{x}}_p[i+1]$  правые части уравнений (4.5) и (4.6), получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_p[i+1] &= \mathbf{A}_{pHF} \mathbf{x}_p[i+1] + \mathbf{B}_{cdpHF} \mathbf{u}_{r\pm}[i] - (\mathbf{A}_{pHF} - \mathbf{K}_{pHF} \mathbf{C}_{pHF}) \hat{\mathbf{x}}_p[i] - \mathbf{B}_{cdpHF} \mathbf{u}_{r\alpha}[i] - \\ &- \mathbf{K}_{pHF} \alpha[i] = \mathbf{A}_{pHF} \mathbf{x}_p[i+1] - (\mathbf{A}_{pHF} - \mathbf{K}_{pHF} \mathbf{C}_{pHF}) \hat{\mathbf{x}}_p[i] - \mathbf{K}_{pHF} \mathbf{C}_{pHF} \mathbf{x}[i] = \\ &= (\mathbf{A}_{pHF} - \mathbf{K}_{pHF} \mathbf{C}_{pHF}) [\mathbf{x}_p[i] - \hat{\mathbf{x}}_p[i]] = (\mathbf{A}_{pHF} - \mathbf{K}_{pHF} \mathbf{C}_{pHF}) \mathbf{e}_p[i]. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем разностное однородное уравнение

$$\mathbf{e}_p[i+1] = (\mathbf{A}_{pHF} - \mathbf{K}_{pHF} \mathbf{C}_{pHF}) \mathbf{e}_p[i].$$

Матрица  $\mathbf{A}_{obs} = \mathbf{A}_{pHF} - \mathbf{K}_{pHF} \mathbf{C}_{pHF}$  — это матрица динамики Наблюдателя. Ее собственные числа ( $Zep$ ) определяют быстродействие сходимости оценки вектора состояния. Скорость сходимости процессов должна быть в 2–3 раза выше, чем скорость регулирования объекта.

Вычислить матрицу  $\mathbf{K}_p$  можно используя как оператор

$$\mathbf{K}_p = \text{acker}(\mathbf{A}_p.', \mathbf{C}_p.', Zep).',$$

так и оператор

$$\mathbf{K}_p = \text{place}(\mathbf{A}_p.', \mathbf{C}_p.', Zep).'$$

#### 4.5.2. Дискретный Наблюдатель платы пониженного порядка

Первая координата вектора состояния  $\mathbf{x}_p[i]$  измеряется, причем шум измерения незначителен. По этой причине может казаться целесообразным оценивать Наблюдателем только вторую координату вектора состояния и синтезировать Наблюда-

тель, дающий только оценку  $\hat{\alpha}[i]$ , то есть Наблюдатель пониженного порядка.

Запишем уравнения платы еще раз (уравнения (4.4а) и (4.4б)):

$$\mathbf{x}_p[i+1] = \mathbf{A}_{pHF} \mathbf{x}_p[i] + \mathbf{B}_{cdpHF} u_{r\alpha}[i], \quad (4.7a)$$

$$y_p[i] = \mathbf{C}_{pHF} \mathbf{x}_p[i]. \quad (4.7б)$$

Уравнение Наблюдателя платы полного порядка для этой модели имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}[i+1] &= \mathbf{A}_{pHF} \hat{\mathbf{x}}[i] + \mathbf{B}_{cdpHF} u_{r\alpha}[i] + K_{pHF} (\mathbf{y}[i] - \hat{\mathbf{y}}[i]) = \\ &= (\mathbf{A}_{pHF} - K_{pHF} \mathbf{C}_{pHF}) \hat{\mathbf{x}}[i] + \mathbf{B}_{cdpHF} u_{r\alpha}[i] + K_{pHF} \mathbf{y}[i]; \\ \hat{\mathbf{x}}[i+1] &= (\mathbf{A}_{pHF} - K_{pHF} \mathbf{C}_{pHF}) \hat{\mathbf{x}}[i] + \mathbf{B}_{cdpHF} u_{r\alpha}[i] + K_{pHF} \mathbf{y}[i], \quad (4.8) \end{aligned}$$

где  $K_{pHF}$  — матрица, задающая желаемые полюсы Наблюдателя.

Запишем уравнение (4.7 а) для каждой координаты в отдельности, получим следующие уравнения:

$$\dot{\alpha}[i+1] = a_{pHF22} \dot{\alpha}[i] + a_{pHF21} \alpha[i] + b_{cdpHF2} u_{r\alpha}[i],$$

$$\alpha[i+1] = a_{pHF11} \alpha[i] + a_{pHF12} \dot{\alpha}[i] + b_{cdpHFp1} u_{r\alpha}[i].$$

Преобразуем второе уравнение:

$$\dot{\alpha}[i+1] = a_{pHF22} \dot{\alpha}[i] + a_{pHF21} \alpha[i] + b_{cdpHF2} u_{r\alpha}[i],$$

$$\alpha[i+1] - a_{pHF11} \alpha[i] - b_{cdpHFp1} u_{r\alpha}[i] = a_{pHF12} \dot{\alpha}[i].$$

Сопоставляя эти уравнения с (4.7а) и (4.7б), заметим, что они эквиваленты, если сделать следующие замены:

$$\dot{\alpha}[i+1] \rightarrow \mathbf{x}_p[i+1],$$

$$\alpha[i+1] - a_{pHF11}\alpha[i] - b_{cdpHFp1}u_{r\alpha}[i] \rightarrow y_p[i],$$

$$a_{pHF12} \rightarrow C_{pHF},$$

$$a_{pHF22} \rightarrow A_{pHF},$$

$$a_{pHF21}\alpha[i] + b_{cdpHF2}u_{r\alpha}[i] \rightarrow B_{cdpHF}u_{r\alpha}[i].$$

Произведя эти подстановки в уравнение Наблюдателя полного порядка (4.8), получим уравнение Наблюдателя пониженного порядка для платы:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}[i+1] = & (a_{pHF22} - K_{pHF}a_{pHF12})\hat{\alpha}[i] + a_{pHF21}\alpha[i] + b_{cdpHF2}u_{r\alpha}[i] + \\ & + K_{pHF}(\alpha[i+1] - a_{pHF11}\alpha[i] - b_{cdpHF1}u_{r\alpha}[i]). \end{aligned}$$

Правая часть уравнения Наблюдателя содержит переменную  $\alpha[i+1]$ , для исключения которой сделаем замену:

$$\hat{\alpha}[i] = \hat{q}_p[i] + K_{pHF}\alpha[i],$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_p[i+1] + K_{pHF}\alpha[i+1] = & (a_{pHF22} - K_{pHF}a_{pHF12})(\hat{q}_p[i] + K_{pHF}\alpha[i]) + a_{pHF21}\alpha[i] + \\ & + b_{cdpHF2}u_{r\alpha}[i] + K_{pHF}(\alpha[i+1] - a_{pHF11}\alpha[i] - b_{cdpHF1}u_{r\alpha}[i]); \end{aligned}$$

Приведем подобные:

$$\begin{aligned} \hat{q}_p[i+1] = & (a_{pHF22} - K_{pHF}a_{pHF12})\hat{q}_p[i] + \\ & + [(a_{pHF22} - K_{pHF}a_{pHF12})K_{pHF} + a_{pHF21} - K_{pHF}a_{pHF11}]\alpha[i] + \\ & + (b_{cdpHF2} - K_{pHF}b_{pHF1})u_{r\alpha}[i]; \end{aligned}$$

Обозначим:

$$K_{gHF} = a_{pHF22} - K_{pHF} a_{pHF12},$$

$$K_{yHF} = (a_{pHF22} - K_{pHF} a_{pHF12}) K_{pHF} + a_{pHF21} - K_{pHF} a_{pHF11},$$

$$K_{uHF} = b_{cdpHF2} - K_{pHF} b_{pHF1}.$$

$$\hat{q}_p[i+1] = K_{gHF} \hat{q}_p[i] + K_{yHF} \alpha[i] + K_{uHF} u_{r\alpha}[i].$$

Структурная схема Наблюдателя представлена на рис. 4.4.

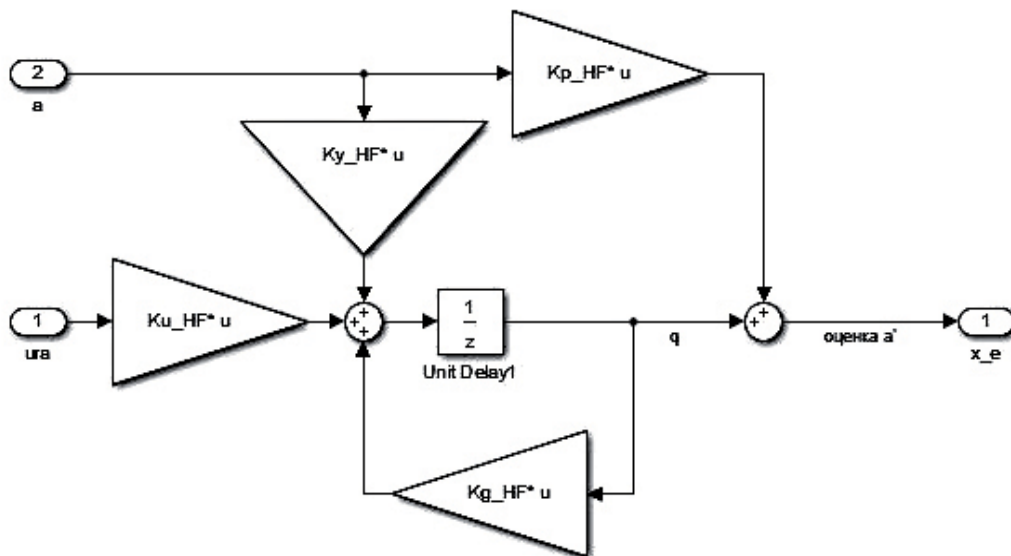


Рис. 4.4. Подсистема, реализующая Наблюдатель платы пониженного порядка

В MATLAB для расчета Наблюдателя пониженного порядка нужно:

1. Задать один полюс в  $z$ -плоскости ( $Zep$ );

2. Рассчитать матрицу  $K_{pHF}$ :

$$Kp\_HF = place(ApHF(2,2).', ApHF(1,2).', Zep).'$$

3. Рассчитать матрицу  $K_{gHF}$ :

$$Kg\_HF = ApHF(2,2) - Kp\_HF * ApHF(1,2).$$

4. Рассчитать матрицу  $K_{yHF}$ :

$$K_{yHF} = K_{gHF}^* K_{pHF} - K_{gHF}^* A_{pHF}(1,1) + A_{pHF}(2,1).$$

5. Рассчитать матрицу  $K_{uHF}$ :

$$K_{uHF} = B_{pHF}(2) - K_{pHF}^* B_{pHF}(1).$$

## 4.6. Получение цифровой модели шара на плате

### Вариант 1

При синтезе цифровой системы управления предлагается представить непрерывную модель шара совместно с непрерывной эквивалентной замкнутой платой (плата с регулятором) как единый непрерывный эквивалентный объект. С этой целью преобразуем матрицы цифрового контура управления платой

$$A_{su\_pHF} = A_{pHF} - B_{cdpHF} L_{pHF}, B_{su\_pHF} = B_{cdpHF}, C_{su\_pHF} = C_{cdpHF}$$

в непрерывный эквивалентный объект с матрицами

$$A_{su\_p\_ekv}, B_{su\_p\_ekv}, C_{su\_p\_ekv}.$$

В MATLAB, для того чтобы перевести цифровую модель в непрерывную необходимо:

1. Рассчитать матрицы для замкнутого цифрового контура управления платы ( $A_{su\_p\_HF}$ ,  $B_{su\_p\_HF}$ ,  $C_{su\_p\_HF}$ ,  $D_{su\_p\_HF}$ ).

2. Найти модель объекта в пространстве состояний. Для этого записать:

$$\text{sys\_su\_p\_HF} = \text{ss} (A_{su\_p\_HF}, B_{su\_p\_HF}, C_{su\_p\_HF}, D_{su\_p\_HF}).$$

3. Перейти в непрерывной эквивалентной модели в пространстве состояний:

`sys_p_ekv = d2c (sys_su_p_HF, 'foh') .`

4. Найти матрицы искомой непрерывной эквивалентной модели:

`[Ap_ekv, Bp_ekv, Cp_ekv, Dp_ekv] = ssdata  
(sys_p_HF) .`

Исходя из уравнения (4.3a), запишем математическую модель шара, учитывая, что для шара управляющим сигналом будет изменение углового положения платы —  $\alpha$ .

$$\dot{\mathbf{x}}_b(t) = \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b(t) + \mathbf{B}_b \alpha(t),$$

$$y_b(t) = \mathbf{C}_b \mathbf{x}_b(t),$$

где

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{m_b g R_b^2}{m_b R_b^2 + J_b} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_b = [1 \quad 0], \mathbf{x}_b = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Объединенный непрерывный объект будет иметь вектор состояния

$$\mathbf{x}_{pb} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Матрицы непрерывного объекта будут иметь блочный вид:

$$\mathbf{A}_{pb} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{su\_p\_ekv} & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_b \cdot \mathbf{C}_{su\_p\_ekv} & \mathbf{A}_b \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{pb} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{su\_p\_ekv} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{pb} = [0 \quad 0 \quad \mathbf{C}_b]$$

Получили модель непрерывного объекта четвертого порядка, для которого будем строить цифровой регулятор с периодом квантования  $T_{LF}$ .



После этого перейдем от непрерывной модели к цифровой:

$$\mathbf{x}_{pb}[l+1] = \mathbf{A}_{pbLF} \mathbf{x}_{pb}[l] + \mathbf{B}_{pbLF} u_{LF}[l], \quad (4.6a)$$

$$y_{pb}[l] = \mathbf{C}_{pbLF} \mathbf{x}_{pb}[l]. \quad (4.6b)$$

#### 4.6.2. Вариант 2

При синтезе цифровой системы управления шаром на плате предлагается рассчитать матрицы цифровой модели «шар на замкнутой плате», без перевода цифрового контура управления платой в непрерывный аналог.

Учитывая, что возмущающее воздействие шара на плату предполагается скомпенсированным в системе управления, запишем матрицы полного непрерывного объекта из уравнения (4.3a):

$$\dot{\mathbf{x}}_{pb}(t) = \mathbf{A}_{pb} \mathbf{x}_{pb}(t) + \mathbf{B}_{cdpb} u_{ra}(t), \quad (4.8a)$$

$$y_{pb}(t) = \mathbf{C}_{pb} \mathbf{x}_{pb}(t), \quad (4.8b)$$

где

$$\mathbf{x}_{pb} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{pb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_k}{J_p + J_b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m_b g R_b^2}{m_b R_b^2 + J_b} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{cdpb} = \mathbf{B}_p K_{cd} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_{cd}}{J_p + J_b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{pb} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее мы переводим непрерывную модель объекта (4.8а), (4.8б) в модель объекта с цифровым управлением с периодом квантования  $T_{HF}$  аналогично тому, как переводили непрерывную модель платы в цифровую с этим же периодом квантования. В итоге мы получим следующую цифровую модель шара на плате:

$$\dot{\mathbf{x}}_{pb\ HF}[i] = \mathbf{A}_{pb\ HF} \mathbf{x}_{pb\ HF}[i] + \mathbf{B}_{cdpb\ HF} u_{ra}[i],$$

$$y_{pb\ HF}[i] = \mathbf{C}_{pb\ HF} \mathbf{x}_{pb\ HF}[i].$$

Теперь учтем высокочастотное управление платой, изображенное на рис. 4.5 и 4.6.

При управлении платой матрица  $\mathbf{L}_{p\ HF}$  умножается на первые две координаты вектора состояния  $\mathbf{x}_{pb\ HF}$ . Поэтому матрица  $\mathbf{C}_{p\ HF}$  имеет такой вид, чтобы при умножении на нее вектора состояния мы получили его первые две координаты:

$$\mathbf{C}_{p\ HF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

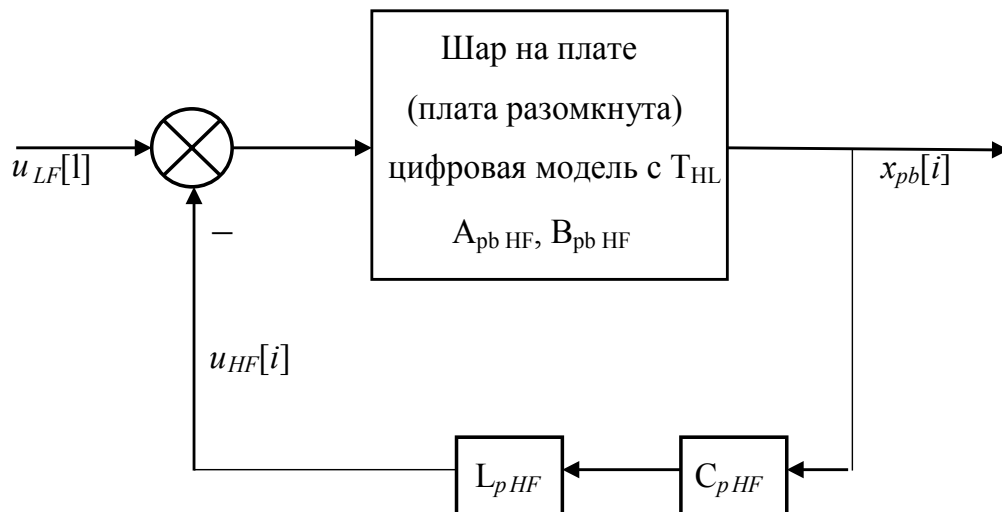


Рис. 4.5. Структурная схема высокочастотного управления

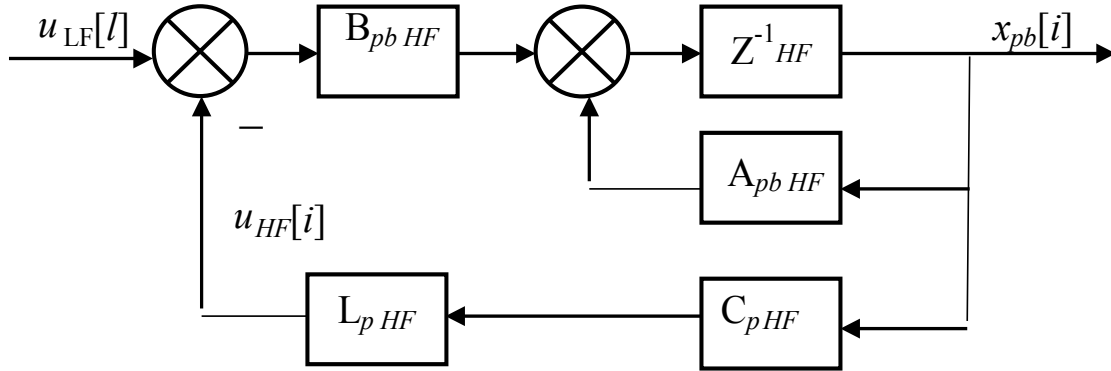


Рис. 4.6. Развернутая структурная схема высокочастотного управления

На рис. 4.7 представлена циклограмма двухчастотного управления. Так как за период  $T_{LF}$  сигнал  $u_{HF}[l]$  сменится 40 раз, то  $m = 40$ , то есть  $T_{LF} = m \cdot T_{HF}$ . Со смены сигнала  $u_{LF}[l]$  до его следующей смены  $u_{LF}[l+1]$  сигнал  $u_{HF}[i]$  сменится 40 раз. Столько же раз за это время сменится и сигнал  $x_{pb}$ .

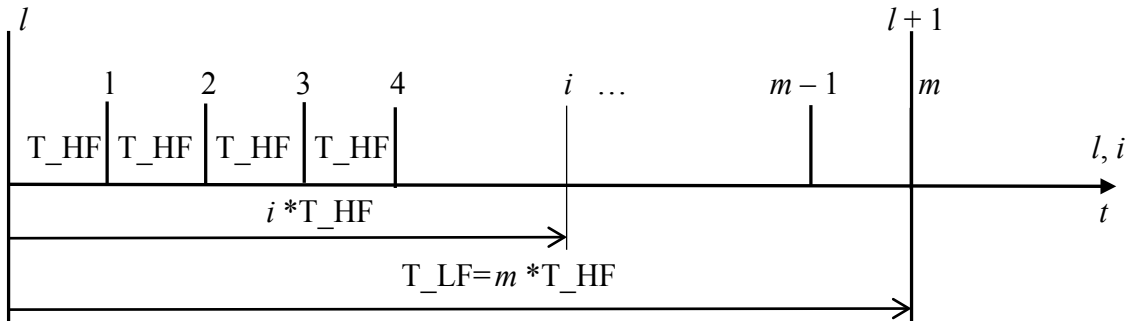


Рис. 4.7. Циклограмма двухчастотного управления

Запишем значение координаты  $x_{pb}$ , исходя из рис. 4.5, 4.6 и 4.7:

$$\begin{aligned}
 & x_{pb} [lm T_{HF} + T_{HF}] = \\
 & = A_{pb HF} x_{pb} [lm T_{HF}] - B_{cdpb HF} L_{p HF} C_{p HF} x_{pb} [lm T_{HF}] + B_{cdpb HF} u_{LF} [l T_{LF}].
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + T_{HF}] = (\mathbf{A}_{pb HF} - \mathbf{B}_{cdpb HF} \mathbf{L}_{pHF} \mathbf{C}_{p HF}) \mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF}] + \mathbf{B}_{cdpb HF} \mathbf{u}_{LF} [lT_{LF}].$$

Обозначим  $\chi_{HF} = \mathbf{A}_{pb HF} - \mathbf{B}_{cdpb HF} \mathbf{L}_{pHF} \mathbf{C}_{p HF}$ , тогда получим:

$$\mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + T_{HF}] = \chi_{HF} \mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF}] + \mathbf{B}_{cdpb HF} \mathbf{u}_{LF} [lT_{LF}].$$

Запишем значение следующей координаты:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + 2T_{HF}] &= \\ &= \mathbf{A}_{pb HF} \mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + T_{HF}] + \mathbf{B}_{cdpb HF} \mathbf{u}_{LF} [lT_{LF}] - \mathbf{B}_{cdpb HF} \mathbf{L}_{pHF} \mathbf{C}_{p HF} \mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + T_{HF}] = \\ &= (\mathbf{A}_{pb HF} - \mathbf{B}_{cdpb HF} \mathbf{L}_{pHF} \mathbf{C}_{p HF}) \mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + T_{HF}] + \mathbf{B}_{cdpb HF} \mathbf{u}_{LF} [lT_{LF}] = \\ &= \chi_{HF} \mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + T_{HF}] + \mathbf{B}_{cdpb HF} \mathbf{u}_{LF} [lT_{LF}]. \end{aligned}$$

Подставим значение  $\mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + T_{HF}]$  из предыдущего выражения и получим:

$$\mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + 2T_{HF}] = \chi_{HF}^2 \mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF}] + (\chi_{HF} + 1) \mathbf{B}_{cdpb HF} \mathbf{u}_{LF} [lT_{LF}].$$

Запишем значение следующей координаты:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + 3T_{HF}] &= \\ &= \chi_{HF} \mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + 2T_{HF}] + \mathbf{B}_{cdpb HF} \mathbf{u}_{LF} [lT_{LF}]. \end{aligned}$$

Подставим значение  $\mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + 2T_{HF}]$  из предыдущего выражения и получим:

$$\mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + 3T_{HF}] = \chi_{HF}^3 \mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF}] + (\chi_{HF}^2 + \chi_{HF} + 1) \mathbf{B}_{cdpb HF} \mathbf{u}_{LF} [lT_{LF}].$$

Обобщая, получим:

$$\mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + mT_{HF}] = \chi_{HF}^m \mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF}] + \sum_{\gamma=0}^{m-1} \chi_{HF}^\gamma \mathbf{B}_{cdpb HF} u_{LF} [lT_{LF}].$$

Анализируя выражение для  $\mathbf{x}_{pb} [lmT_{HF} + mT_{HF}]$ , заметим, что

$$A_{pbLF} = \chi_{HF}^m$$

— это матрица динамики, а

$$B_{pbLF} = \sum_{\gamma=0}^{m-1} \chi_{HF}^\gamma \mathbf{B}_{cdpb HF}$$

— это матрица управления новой низкочастотной моделью шара на «замкнутой плате», представленной на рис. 4.8.

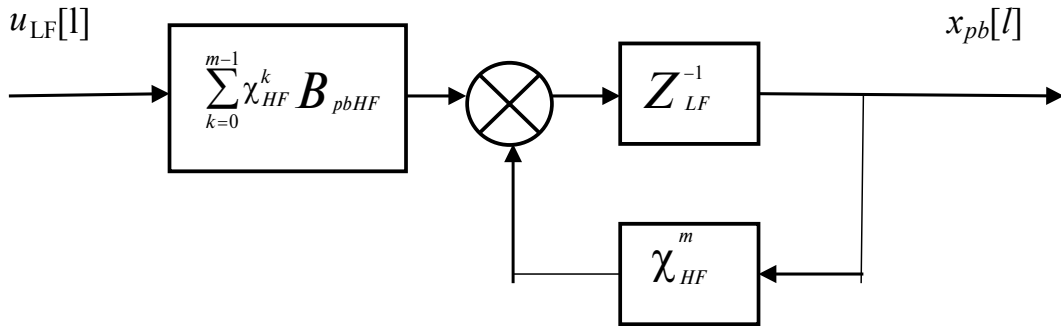


Рис. 4.8. Структурная схема низкочастотной модели шара на «замкнутой плате»

Полученная низкочастотная модель шара на «замкнутой плате» имеет вид:

$$\mathbf{x}_{pb} [l+1] = \mathbf{A}_{pbLF} \mathbf{x}_{pb} [l] + \mathbf{B}_{pbLF} u_{LF} [l],$$

$$y_{pb} [l] = \mathbf{C}_{pbLF} \mathbf{x}_{pb} [l],$$

где

$$\mathbf{C}_{pbLF} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

## 4.7. Синтез управления шаром на замкнутой плате

В предыдущих параграфах двумя методами была получена цифровая модель шара на замкнутой плате:

$$\mathbf{x}_{pb}[l+1] = \mathbf{A}_{pbLF} \mathbf{x}_{pb}[l] + \mathbf{B}_{pbLF} u[l], \quad (4.9a)$$

$$y_{pb}[l] = \mathbf{C}_{pbLF} \mathbf{x}_{pb}[l]. \quad (4.9b)$$

В этом параграфе будет описан синтез управления шаром на плате, при котором, будем считать, угловая скорость платы и скорость изменения координаты шара измеряются. Управляющий сигнал формируется в виде линейной комбинации уставки и переменных состояния:

$$\begin{aligned} u[l] &= L_{SP\ LF} \alpha_{SP}[l] - L_{pbLF1} \alpha[l] - L_{pbLF2} \dot{\alpha}[l] - L_{pbLF3} x[l] - L_{pbLF4} \dot{x}[l] = \\ &= L_{SP\ LF} \alpha_{SP}[l] - \mathbf{L}_{pbLF} \mathbf{x}_{pb}[l], \end{aligned}$$

где  $L_{SP\ LF}$  — коэффициент по уставке, а

$$\mathbf{L}_{pbLF} = \begin{bmatrix} L_{pbLF1} & L_{pbLF2} & L_{pbLF3} & L_{pbLF4} \end{bmatrix}$$

— матрица обратной связи по вектору состояния. Подставив выражение для  $u[l]$  в уравнение (4.9a) и приведя подобные, получим уравнение замкнутой системы

$$\mathbf{x}_{pb}[l+1] = (\mathbf{A}_{pbLF} - \mathbf{B}_{pbLF} \mathbf{L}_{pbLF}) \mathbf{x}_{pb}[l] + \mathbf{B}_{pbLF} L_{SP\ LF} u[l]. \quad (4.10)$$

Таким образом, матрица  $\mathbf{L}_{pbLF}$  должна быть такой, что собственные числа  $p_{cp1}$  и  $p_{cp2}$  матрицы динамики замкнутой системы  $\mathbf{A}_{pbLF} - \mathbf{B}_{pbLF} \mathbf{L}_{pbLF}$  имеют желаемые значения. Коэффициент  $L_{SP\ LF}$  должен быть таким, чтобы в установившемся режиме была обеспечена нулевая ошибка регулирования  $e_\alpha = x_{SP} - x$ , где  $x_{SP} = \text{const}$  ( $x$  — координата шара).

Коэффициент  $L_{SP\ LF}$  рассчитывается аналогично расчету коэффициента  $L_{SP\ HF}$  в пункте 4.4.3.

**Нахождение скорости перемещения шара.** Для реализации синтезированного управления нужно располагать информацией об угле наклона платы, об угловой скорости платы, о координате шара и скорости ее измерения. Угол измеряется с помощью потенциометрического датчика, угловую скорость платы возьмем с Наблюдателя для платы, проквантовав его с периодом  $T_{LF}$ , координата шара измеряется с помощью камеры. А вот скорость измерения координаты шара нам неизвестна. Для ее оценки можно построить Наблюдатель любого порядка, но в данной работе мы вместо скорости измерения координаты шара будем использовать первую разность сигнала координаты положения шара.

Для того чтобы найти скорость изменения координаты шара, необходимо поставить блок Discrete Derivative из библиотеки Discrete.

## 4.8. Выполнение работы

Данная работа рассчитана на три четырехчасовых лабораторных занятия. Уточняйте с руководителем объем выполненной работы на каждом занятии. При необходимости заключительный этап работы может быть перенесен на четвертое занятие.

1. Вспомните из лабораторной работы № 1, как получены уравнения (4.1a)–(4.1г), имеющие номера (1.5a)–(1.5г) в первой лабораторной работе (пункт 1.3.1).

2. Ознакомьтесь с линеаризацией этих уравнений (параграф 4.2).

3. Запустите MATLAB с помощью вашего ярлыка. Создайте новую папку, назвав ее ЛР № 4 и сделав текущей. Создайте файл-сценарий, сохранив его под именем ScriptDSynPlateBall.m. Весь код MATLAB, используемый при дальнейших вычислениях, записывайте в этот файл. Создайте Simulink-модель, сохранив ее под именем DSynPlateBall.slx. В качестве инициализирующего файла прикрепите к этой модели ScriptDSynPlateBall.m.

4. Ознакомьтесь с процедурой синтеза управления платой (параграф 4.4).

5. Найдите матрицы цифровой модели платы при  $T_{HF} = 1$  мс.

6. Выберите желаемые собственные числа замкнутой системы управления платой  $p_{cp1}$  и  $p_{cp2}$  согласно пункту 3.2.1 работы № 3 (рекомендуется требовать время установления  $T_s$ , равное 0,4 с) и представьте их в  $z$ -плоскости согласно пункту 4.3.1.1.

7. Используйте MATLAB для вычисления матрицы обратной связи  $L_{pHF}$  с помощью команд asker или place. Используйте MATLAB для вычисления коэффициента  $L_{SP}$  согласно пункту 4.3.1.3.

8. Руководствуясь структурной схемой непрерывного регулятора из работы № 3, соберите в Simulink-модели схему для проверки синтезированного дискретного управления платой с тем отличием, что каждая координата состояния должна быть квантована с высокой частотой  $T_{HF}$  с помощью блока Zero-Order Hold, находящегося в библиотеке Simulink Discrete. В качестве модели платы используйте подсистему «Линейная модель платы» из Simulink-модели работы № 3 из подсистемы «Проверка синтезированного управления». Для получения переходной характеристики замкнутой системы используйте в качестве уставки  $\alpha_{SP}(t)$  ступенчатое воздействие (блок Step библиотеки Sources). Создайте из схемы подсистему, назвав ее «Проверка синтезированного управления платой». Если в результате моделирования система устойчива и качество процессов вас устраивает, то переходите к следующему этапу.



9. Ознакомьтесь с процедурой синтеза Наблюдателя платы (параграф 4.5).

10. Синтезируйте Наблюдатель платы полного порядка (согласно пункту 4.5.1) или пониженного порядка (согласно пункту 4.5.2), создайте в Simulink-модели соответствующую подсистему, представленную на рис. 4.3 или 4.4.

11. В Simulink-модели создайте копию подсистемы «Проверка синтезированного управления платой». Измените имя копии подсистемы на «Проверка наблюдателя платы». В переименованную подсистему добавьте подсистему, реализующую Наблюдатель платы (созданную на этапе 10), и измените схему так, чтобы проверить работоспособность Наблюдателя. Если результаты моделирования корректны, то переходите к следующему этапу.

12. В Simulink-модели создайте копию подсистемы «Проверка Наблюдателя платы» и переименуйте на «Проверка синтезированного управления шара на плате». Удалите из подсистемы «Линейная модель платы» выход по скорости изменения угла.

13. Также добавьте в подсистему «Линейная модель платы» модель привода, созданную в ходе выполнения работы № 2. Вход системы назовите  $ua$ , вместо  $K_{cd}$  поставьте компенсатор нелинейности привода, который тоже был создан в работе № 2. Не забудьте, что после компенсатора стоит блок Saturation. Собирайте в подсистему созданный регулятор и назовите ее «Регулятор платы». Входами в подсистему будут являться уставка по альфа —  $SPa$ , а также выход подсистемы «Линейная модель платы» —  $a$ . Выходом этой подсистемы будет являться выход компенсатора  $ua$ .

14. К подсистеме «Линейная модель платы» добавьте подсистему «Линейная модель шара». Входом модели является угол наклона платы (выход модели платы), а выходом — координата шара.

15. Соберите модель шара в подсистему «Шар», а две эти подсистемы в третью подсистему — «Объект». При этом входом подсистемы «Плата» является сигнал с компенсатора ( $ua$  на рис. 4.1), выходом — угол наклона платы ( $\alpha$  на рис. 4.1); входом подсистемы шара — выход подсистемы «плата» ( $\alpha$  на рис. 4.1), а выходом — координата шара ( $x$  на рис. 4.1). И входом подсистемы объекта является сигнал с компенсатора платы ( $ua$ ), выходом —  $\alpha, x$ .

16. Ознакомьтесь с процедурами получения цифровой модели шара на плате (параграф 4.6).

17. Выполните расчет цифровой модели шара на контуре управления платой в скрипт-файле.

18. Ознакомьтесь с синтезом цифрового управления шара на плате (параграф 4.7).

19. В Simulink-модели, используя в качестве объекта подсистему «Объект», синтезируйте низкочастотное управление и проверьте его работоспособность. Время регулирования для контура возьмите 1.5 с. Для получения скорости изменения координаты шара используйте блок Discrete Derivative.

20. Соберите синтезированное управление в подсистему «Регулятор шара». Входами подсистемы являются уставка по координате шара —  $SPx$ , квантованная с периодом  $T_{LF}$ , значение координаты шара ( $x$ ), взятое с подсистемы «Объект» и квантованное с периодом  $T_{LF}$ , значение угла наклона платы ( $a$ ), взятое с подсистемы «Объект» и квантованное с периодом  $T_{LF}$ , а также оценка скорости изменения угла наклона платы, взятая из регулятора платы и квантованная с периодом  $T_{LF}$ . Выходом регулятора шара является уставка по углу наклона платы —  $SPA$ . Соберите подсистемы «Регулятор шара» и «Регулятор платы» в одну подсистему и назовите ее «Регулятор».

21. Проверьте, что все входные сигналы подсистемы «Регулятор платы» квантованы в регуляторе с частотой  $T_{HF}$ , а все вход-

ные сигналы подсистемы «Регулятор Платы» квантованы в регуляторе с частотой  $T_{LF}$

22. Проверьте еще раз работоспособность вашей системы.

23. Так как достаточно короткий начальный промежуток времени после запуска модели Simulink информация о положении шара не является действительной, то есть сигнал  $x$  соответствует положению шара за пределами области видимости камеры, то блоки Switch, совместно с блоками From (с меткой WCT), которые принимают информацию от блока Goto, расположенного в подсистеме обработки изображения с веб-камеры, организуют следующую логику «Если мы не знаем, где находится шар, то ничего не делаем, не подаем напряжения на катушки». Поэтому для проверки синтезированного управления на стенде добавим эту защиту, представленную на рис. 4.9: после компенсатора в регуляторе платы добавьте блок Switch, находящийся в библиотеке Signal Routing. На верхнюю ветвь подать сигнал с ограничителя после компенсатора, на третью — блок Constant в библиотеке Sources. На вторую ветвь подать сигнал с блока From, в котором в окне Goto tag необходимо написать WCT. Также выход сигнала с объекта по координате шара направьте на модель камеры на рис. 4.10.

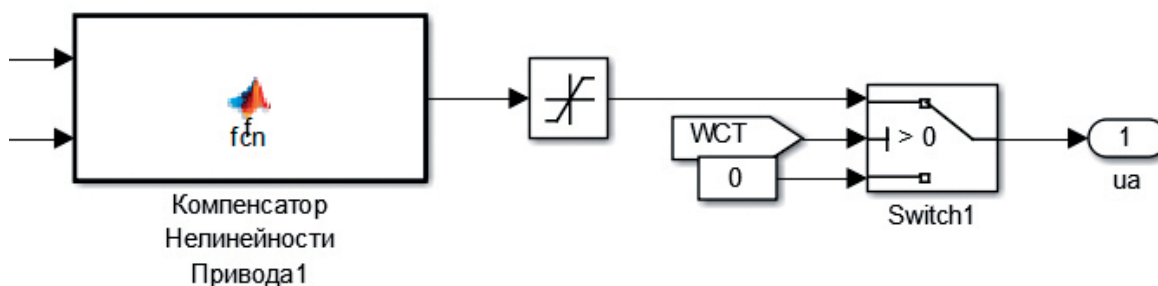


Рис. 4.9. Защита «Если мы не знаем, где находится шар, то ничего не делаем, не подаем напряжения на катушки»

Схемы, представленные на рис. 4.9, 4.10, обнуляют входы приводов  $ua$ ,  $ub$  на интервале первых трех тактов по 0.04 с после

включения стенда и в случаях превышения координатами  $x_b, y_b$  предельных значений 0.2 м.

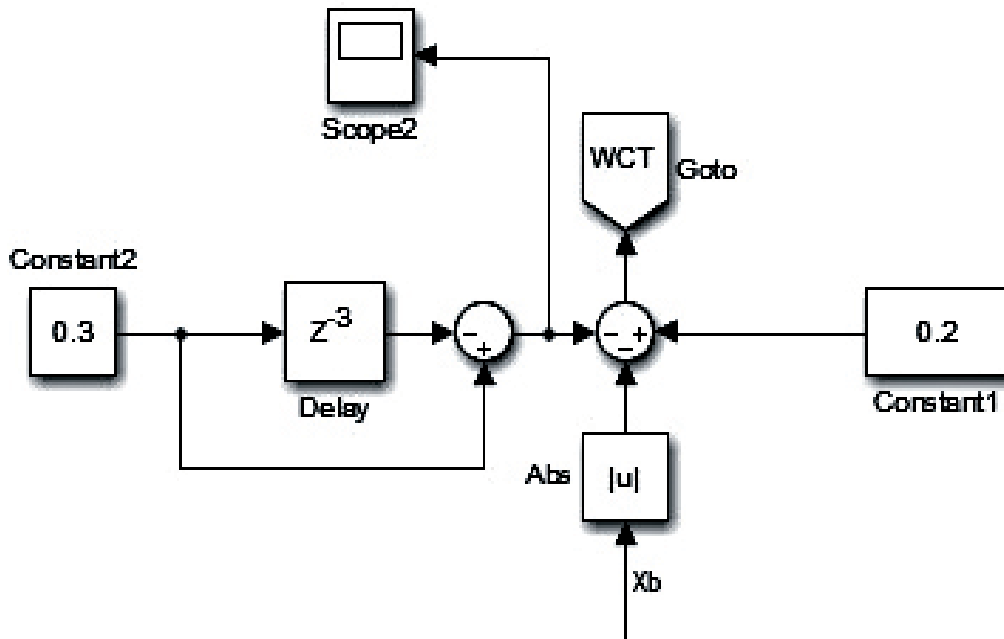


Рис. 4.10. Модель камеры

24. Проверьте, что в вашей синтезированной системе сигнал с выхода регулятора первые три периода  $T_{LF}$  равен нулю.

25. У преподавателя возьмите Simulink-модель RegBall, представленную на рис. 4.11.

Откройте эту Simulink-модель и в качестве инициализирующего файла прикрепите свой файл для того, чтобы в результате его выполнения значения рассчитанных переменных в скрипт-файле не были удалены из рабочей памяти (Workspace) при эксперименте. Из вашей модели добавьте блоки «Регулятор шара» и «Регулятор платы», смотрите, чтобы сигналы с датчиков шли на правильные названия входов регуляторов.

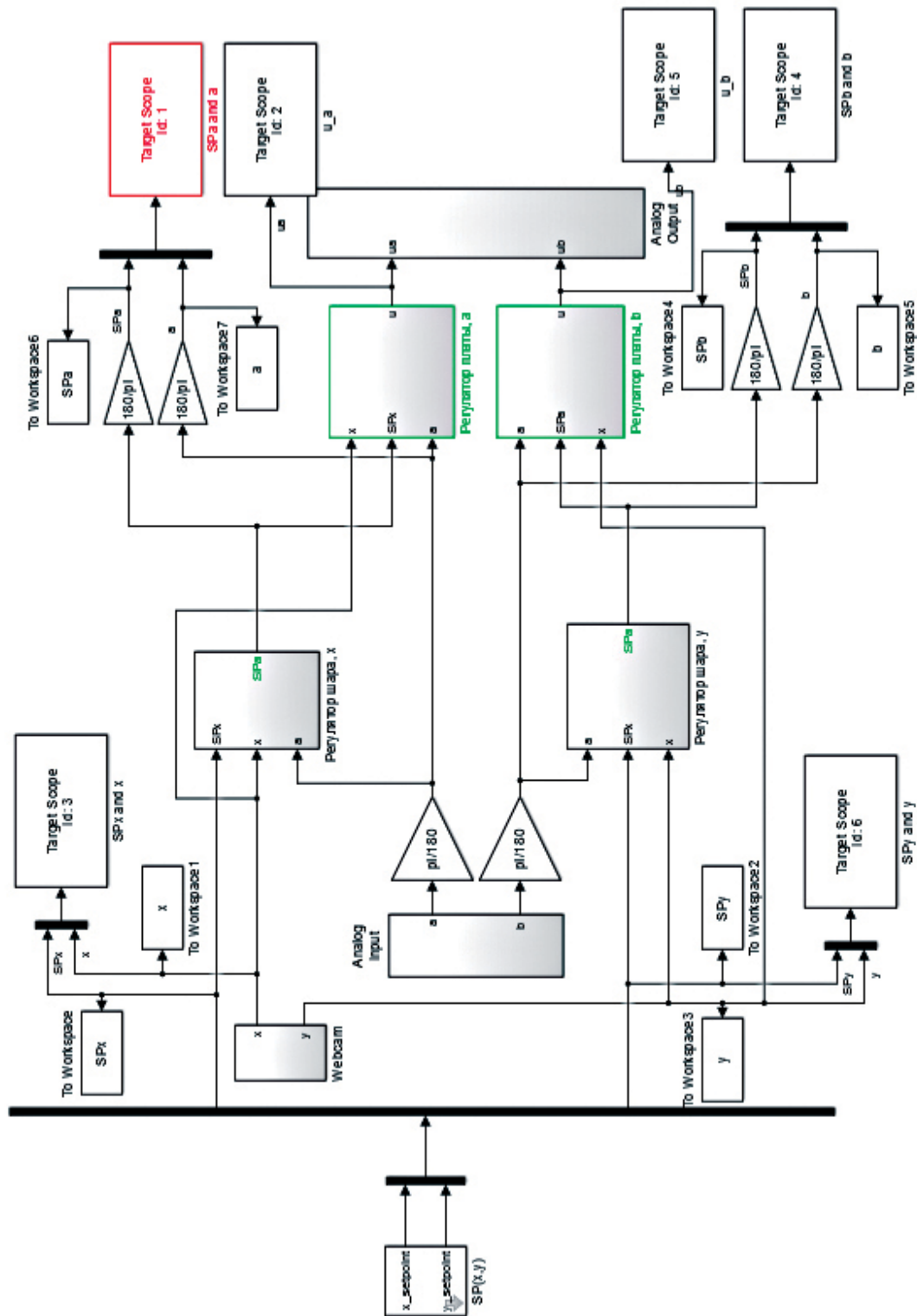


Рис. 4.11. Модель RegBall

26. Возьмите блок  $Sp(x, y)$  и поместите его в вашу модель DSynPlateBall вместо блока Step, формирующего уставку. Сначала подключите выход  $x$  как уставку, постройте графики  $a$  и  $SPa$ ,  $x$  и  $SPx$ , потом подключите выход  $y$  как уставку и постройте  $b$  и  $SPb$ ,  $y$  и  $SPy$ .

27. Для сохранения значений сигналов  $\alpha(t)$  и  $\alpha_{SP}(t)$ ,  $x(t)$  и  $x_{SP}(t)$ ,  $\beta(t)$  и  $\beta_{SP}(t)$ ,  $y(t)$  и  $y_{SP}(t)$  в рабочей области MATLAB использованы блоки **To Workspace** библиотеки Sinks. Предоставьте Simulink-модель RegBall на проверку руководителю работы, после чего сохраните ее. Перезапустите MATLAB, сделайте папку ЛР№ 4 текущей, откройте Simulink-модель RegBall и запустите ее в режиме реального времени.

28. После выполнения Simulink-модели в рабочей области появятся массивы  $a$  и  $Spa$ ,  $b$  и  $SPb$ ,  $x$  и  $SPx$ ,  $y$  и  $SPy$ , которые могут иметь различное число элементов, так как в них отсутствуют данные за малый начальный промежуток времени. Если массивы имеют различное число элементов, то сделайте его одинаковым, удалив данные за первую секунду как написано в работе № 3.

29. Сравните результаты проверки на стенде с результатами моделирования. Подумайте о причинах различий.

30. Синтезированная система является статической. Поэтому в качестве домашнего задания синтезируете астатическое управления шаром. Для этого расширьте модель платы в пространстве состояний (4.9а) и (4.9б), введя пятую переменную состояния  $x_I(t)$ , для которой  $\dot{x}_I(t) = x_{SP}(t) - x(t)$ . Запишите матрицы расширенной системы. Формируйте управляющий сигнал в виде линейной комбинации переменных состояния расширенной системы:

$$u[l] = -L_{pbILF1}\alpha[l] - L_{pbILF2}\dot{\alpha}[l] - L_{pbILF3}x[l] - L_{pbILF4}\dot{x}[l] - L_{pbILF5}x_I[l] = -L_{pbILF}x_{pb}[l].$$

Матрицу  $L_{pbILF}$  вычислите с помощью MATLAB. Проверьте синтезированное управление в Simulink.

## 4.9. Требования к содержанию отчета

1. Представить цели работы.
2. Представить рисунки схем подсистем «Регулятор шара» и «Регулятор платы».
3. Представить графики, доказывающие работоспособность регулятора платы и Наблюдателя пониженного порядка.
4. Представить совмещенные графики процессов  $\alpha(t)$  и  $\alpha_{sp}(t)$ ,  $x(t)$  и  $x_{sp}(t)$ ,  $\beta(t)$  и  $\beta_{sp}(t)$ ,  $y(t)$  и  $y_{sp}(t)$ , полученных при проверке системы управления на модели с уставкой взятой из модели RegBall.
5. Представить совмещенные графики процессов  $\alpha(t)$  и  $\alpha_{sp}(t)$ ,  $x(t)$  и  $x_{sp}(t)$ ,  $\beta(t)$  и  $\beta_{sp}(t)$ ,  $y(t)$  и  $y_{sp}(t)$ , полученных при проверке системы управления на стенде.
6. Отчет оформляется на листах формата А4. Допускается рукописное, печатное или комбинированное оформление.

---

## *Список библиографических ссылок*

1. Савельев И. В. Основы теоретической физики : учеб. руководство. В 2 т. Т. 1 : Механика и электродинамика. — 2-е изд., испр. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 496 с.
2. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. — М. : Лаборатория базовых знаний, 2001. — 616 с.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для вузов. В 5 т. Т. I. Механика. — 4-е изд., стереот. — М. : ФИЗМАТЛИТ ; Изд-во МФТИ, 2005. — 560 с.
4. Ball and Plate Control Experiments 33–240-LabView (For use with LabVIEW 8.6 or later) / Feedback Instruments Ltd., Park Road, Crowborough, East Sussex. TN62QR. UK.
5. Перельмутер В. М. Пакеты расширения MATLAB. Control System Toolbox Robust Control Toolbox. — М. : СОЛОН-ПРЕСС, 2008. — 224 с.



---

## Содержание

Предисловие.....	3
Лабораторная работа № 1. Математическое описание шара на плате и платы без шара. Моделирование платы без шара .....	5
1.1. Цели работы.....	5
1.2. Описание стенда и контроллера .....	5
1.3. Математическое описание шара на плате и платы без шара.....	10
1.3.1. Математическое описание шара на плате.....	18
1.3.2. Математическое описание платы без шара и его линеаризация.....	18
1.4. Выполнение работы.....	19
1.5. Требования к содержанию отчета .....	26
1.6. Контрольные вопросы.....	27
Лабораторная работа № 2. Разработка математической модели электромагнитного привода платы и компенсатора его нелинейности .....	28
2.1. Цели работы.....	28
2.2. Математическая модель электромагнитного привода платы .....	29
2.2.1. Описание эксперимента по регистрации напряжения .....	29

2.2.2. Уравнение, описывающее математическую модель привода.....	32
2.3. Компенсатор нелинейности привода .....	33
2.4. Выполнение работы.....	34
2.5. Требования к содержанию отчета .....	45
2.6. Контрольные вопросы.....	45
Лабораторная работа № 3. Синтез системы управления платой .....	
3.1. Цели работы.....	46
3.2. Синтез управления платой .....	46
3.2.1. Выбор желаемых собственных чисел замкнутой системы .....	48
3.2.2. Расчет матрицы обратной связи по вектору состояния .....	50
3.2.3. Расчет коэффициента $L_{sp}$ в цепи уставки .....	52
3.3. Синтез Наблюдателя платы.....	52
3.3.1. Наблюдатель платы полного порядка .....	53
3.3.2. Наблюдатель платы пониженного порядка .....	55
3.4. Выполнение работы.....	58
3.5. Требования к содержанию отчета .....	65
3.6. Контрольные вопросы.....	65
Лабораторная работа № 4. Цифровой синтез системы управления шаром и платой .....	
4.1. Цели работы.....	67
4.2. Математическое описание шара на плате и его линеаризация .....	67
4.3. Цифровой синтез системы управления .....	73
4.4. Цифровой синтез управления платой.....	75
4.4.1. Выбор желаемых собственных чисел цифровой замкнутой системы .....	78

---

4.4.2. Расчет матрицы обратной связи по вектору состояния .....	78
4.4.3. Расчет коэффициента по уставке .....	78
4.5. Синтез дискретного Наблюдателя платы .....	79
4.5.2. Дискретный Наблюдатель платы пониженного порядка .....	81
4.6. Получение цифровой модели шара на плате .....	85
4.6.1. Вариант 1 .....	85
4.6.2. Вариант 2 .....	87
4.7. Синтез управления шаром на замкнутой плате .....	92
4.8. Выполнение работы .....	93
4.9. Требования к содержанию отчета .....	101
Список библиографических ссылок .....	102

*Учебное издание*

**Панова** Алиса Алексеевна  
**Ровайн** Иван Александрович  
**Страшинин** Евгений Эрастович

**ИССЛЕДОВАНИЕ И СИНТЕЗ  
СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ СТЕНДОМ  
«ШАР НА ПЛАТЕ»**

Редактор *В. О. Корионова*  
Верстка *Е. В. Ровнушкиной*

Подписано в печать 01.06.2017. Формат 60×84 1/8.  
Бумага писчая. Цифровая печать. Усл. печ. л. 6.75.  
Уч.-изд. л. 4.5. Тираж 50 экз. Заказ 190.

Издательство Уральского университета  
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ  
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5  
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41  
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ  
620000, Екатеринбург-83, ул. Тургенева, 4  
Тел.: 8 (343) 350-90-13, 358-93-06, 350-58-20  
Факс: 8 (343) 358-93-06  
<http://print.urfu.ru>

*Для заметок*





**ПАНОВА АЛИСА АЛЕКСЕЕВНА**



**РОВАЙН ИВАН АЛЕКСАНДРОВИЧ**



**СТРАШИНИН ЕВГЕНИЙ ЭРАСТОВИЧ**